Tentamen i Hållfasthetslära AK1 2016-08-15

Tentand är skyldig att visa upp fotolegitimation. Om sådan inte medförts till tentamen skall den visas upp på Avdelningen för Hållfasthetslära senast en vecka efter tentamensdatum. 5-poängsuppgifterna bedöms enligt skalan 0, 3, 4, 5 poäng och 2-poängsuppgifterna bedöms enligt skalan 0, 1, 2 poäng. För godkänt krävs minst 10 poäng.

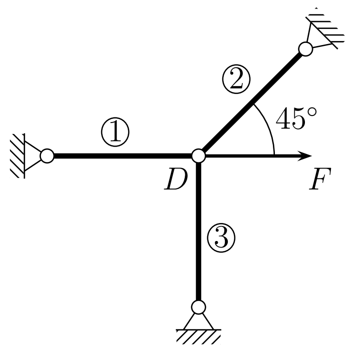
Alla lösningar skall vara väl motiverade och ett tydligt svar skall anges till varje uppgift.

Tillåtna hjälpmedel: Den formelsamling i hållfasthetslära som ingår i anvisad kurslitteratur, tabeller av typ TEFYMA samt miniräknare.

5-poängsuppgifter

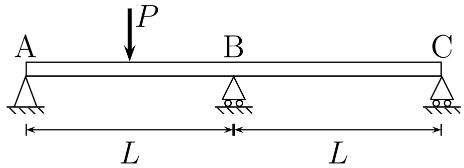
Uppgift 1 (5p)

Tre stänger som har samma längd L, elasticitetsmodul E och tvärsnittsarea A är monterade enligt figur. Stångsystemet utsätts för en horisontell kraft F som angriper i punkten D. Bestäm horisontell och vertikal förskjutning av punkten D.



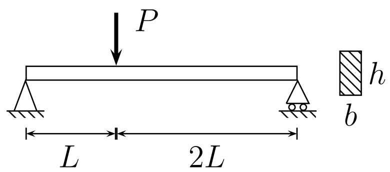
Uppgift 2 (5p)

Beräkna utböjningen mitt på balkdelen BC på grund av punktkraften P som angriper mitt på balkdelen AB. Ange tydligt åt vilket håll utböjningen räknas som positiv. Balkens längd är $2L$, böjstyvheten är EI och balkens egenvikt kan försummas. Materialbeteendet är elastiskt.



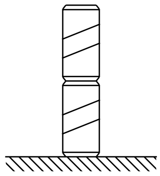
Uppgift 3 (5p)

En fritt upplagd balk med längden $3L$ och böjstyvheten EI belastas med en punktkraft P enligt figur. Balkens tvärsnitt har bredden b och höjden h. Om materialet i balken är elastiskt-idealplastiskt med flytspänningen σ_s, bestäm flytlasten P_s, kollapslasten P_f samt flytlastförhöjningen β.



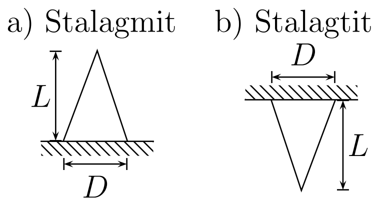
2-poängsuppgifter

Uppgift 4 (2p)



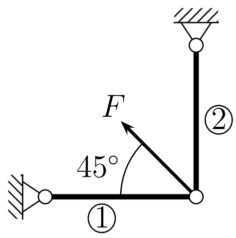
Två oöppnade läskburkar står staplade på ett stelt underlag. Beräkna den axiella spänningen (d.v.s. i vertikalled) i burkväggen mitt på både den övre och den undre burken. Räkna även ut hur många burkar som måste staplas för att den axiella spänningen i den nedersta burken skall gå från drag till tryck. En läskburk har ytterdiametern 66 mm och innerdiametern 65.8 mm, den väger 390 g och det inre trycket är 207 kPa. *Ledning*: Ångpanneformlerna kan användas då det inre trycket beaktas.

Uppgift 5 (2p)



I grottor är det vanligt att se droppstensformationer som kallas *stalagtiter* (hänger från taket) och *stalagmiter* (reser sig från golvet). Droppstensformationerna i figuren kan ses som koner med cirkulära tvärsnitt. Diametern vid basen är D och längden är L. Stenen har densiteten ρ och materialet är linjärelastiskt med elasticitetsmodulen E. Bestäm längdändringen hos både stalagmiten och stalagtiten på grund av egentyngden.
Ledning: En kons volym ges av $V = \pi r^2 h/3$, där r=radien vid basen och h=höjden.

Uppgift 6 (2p)



Ett fackverk med två mot varandra vinkelrät monterade stänger belastas enligt figuren av kraften F. Båda stängerna har längden L och böjstyvheten EI. Vid vilken nivå på kraften F riskeras knäckning i någon av stängerna?

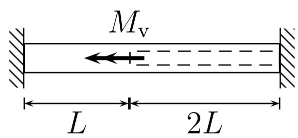
Uppgift 7 (2p)

En stålwire monteras obelastad och vid rumstemperatur i närheten av förbränningsugnen på ett fjärrvärmeverk. Wiren har cirkulärt tvärsnitt med diametern 2 mm. Under drift utsätts wiren för en dragbelastning på 100 N och en konstant temperatur på 650 °C. Materialet i wiren antas vara linjärt termoelastiskt med ett krypbeteende givet av Nortons kryplag

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{c}} = 10^{-7}\mathrm{h}^{-1}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{\mathrm{c7}}}\right)^n$$

Hur mycket har wiren töjts totalt efter 30 dygn? Stålmaterialet har elasticitetsmodulen $E = 210$ GPa, krypgränsen $\sigma_{\mathrm{c7}} = 34$ MPa och Nortonexponenten $n = 5$. Längdutvidgningskoefficienten vid 650 °C är $\alpha = 14 \times 10^{-6}$ °C^{-1}.

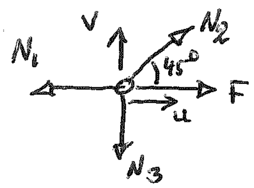
Uppgift 8 (2p)



En cirkulär axel med längden $3L$ sitter fast inspänd mellan två väggar. En tredjedel av axeln utgörs av en solid stång med diametern D medan två tredjedelar utgörs av ett rör med ytterdiametern D och innerdiametern $D/2$. Precis där den solida stången övergår i rör angriper ett vridande moment M_{v}. Materialet i axeln har skjuvmodulen G. Beräkna förvridningen φ i den punkt där momentet angriper.

Lösningsförslag till tentamen i Hållfasthetslära AK1 2016-08-15

1) Frilägg knutpunkten och ställ upp jämviktsekvationer



(↑) $N_2 \cos 45° - N_3 = 0 \Rightarrow N_2 = \sqrt{2}\, N_3$ (1)

(→) $-N_1 + N_2 \cos 45° + F = 0$ (2)

Förskjutningar och stångförlängningar:

$\delta_1 = u$, $\delta_2 = -u\cos 45° - v\cos 45°$, $\delta_3 = v \Rightarrow \delta_2 = -\delta_1 \cos 45° - \delta_3 \cos 45°$

$\Rightarrow \delta_2 = -\dfrac{\delta_1 + \delta_3}{\sqrt{2}}$ (3)

Materialsamband (Hookes lag): $\delta_1 = \dfrac{N_1 L}{EA}$, $\delta_2 = \dfrac{N_2 L}{EA}$, $\delta_3 = \dfrac{N_3 L}{EA}$ (4)

(3)&(4): $N_2 = -\dfrac{N_1 + N_3}{\sqrt{2}}$ där $N_1 = \dfrac{EA}{L} u$, $N_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{EA}{L}(u+v)$, $N_3 = \dfrac{EA}{L} v$ (5)

(1)&(2)&(5): $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{EA}{L}(u+v) = \sqrt{2}\, \dfrac{EA}{L} v \Rightarrow -u - v = 2v \Rightarrow \underline{u = -3v}$ (6)

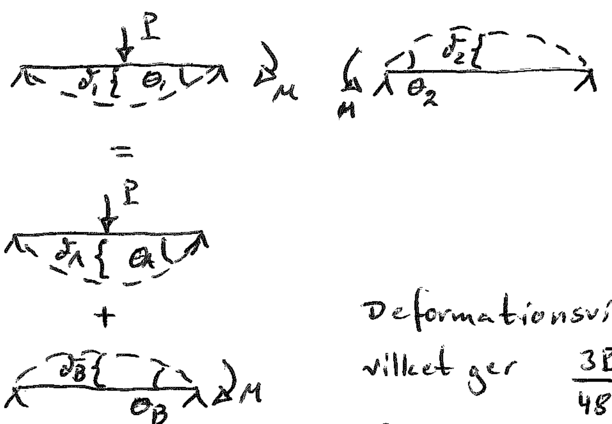
$-\dfrac{EA}{L} u - \dfrac{1}{2} \dfrac{EA}{L}(u+v) + F = 0 \Rightarrow \dfrac{FL}{EA} - \dfrac{3}{2} u - \dfrac{1}{2} v = 0$ (7)

(6)&(7): $\dfrac{2FL}{EA} + 9v - v = 0 \Rightarrow \underline{v = -\dfrac{FL}{4EA}}$

Svar: Horisontell förskjutning $= \dfrac{3FL}{4EA}$; Vertikal förskjutning $= -\dfrac{FL}{4EA}$

---

2) Dela upp problemet i elementarfall och utnyttja vinkeländringsmetoden



$\theta_A = \dfrac{PL^2}{6EI} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3PL^2}{48EI}$

$\theta_B = \dfrac{ML}{3EI}$

$\theta_1 = \theta_A - \theta_B$

$\theta_2 = \dfrac{ML}{3EI}$

Deformationsvillkor: $\theta_1 = \theta_2$

vilket ger $\dfrac{3PL^2}{48EI} - \dfrac{ML}{3EI} = \dfrac{ML}{3EI} \rightarrow \underline{M = \dfrac{3PL}{32EI}}$ (1)

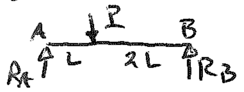
Utböjningar: $\delta_2 = \dfrac{ML^2}{6EI}\left(2 \cdot \dfrac{1}{2} - 3 \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{ML^2}{6EI} \cdot \dfrac{8-6+1}{8} = \dfrac{3ML^2}{48EI}$ (2)

(1)&(2): $\delta_2 = \dfrac{3L^2}{48EI} \cdot \dfrac{3PL}{32EI} = \dfrac{9PL^3}{1536\,EI}$

Svar: Utböjningen (uppåt) blir $\dfrac{9PL^3}{1536EI}$

---

3) Bestäm max. böjande moment

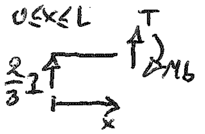


(↑) $R_A + R_B - P = 0$

(↺A) $PL - 3R_B L = 0$

$\Rightarrow R_A = \dfrac{2}{3}P$, $R_B = \dfrac{1}{3}P$

$0 \le x < L$



(↑) $T + \dfrac{2}{3}P = 0$

(↺x) $M_b + \dfrac{2}{3}Px = 0$

$\Rightarrow M_b = -\dfrac{2Px}{3}$

$\Rightarrow \underline{M_{b,max} = -\dfrac{2PL}{3}}$ (1)

Initiell plasticering

$I = \dfrac{bh^3}{12}$, $W_b = \dfrac{I}{\frac{h}{2}} = \dfrac{bh^2}{6}$

$\sigma_s = \dfrac{M_{b,max}}{W_b}$

$\Rightarrow \dfrac{bh^2}{6}\sigma_s = \left|-\dfrac{2P_s L}{3}\right|$

$\Rightarrow P_s = \dfrac{bh^2}{4L}\sigma_s$ (2)

Kollapslast

$M_{b,f} = M_{b,max} = \int_A z\sigma_x \, dA = \dfrac{1}{4} bh^2 \sigma_s$

$\Rightarrow \left|-\dfrac{2P_f L}{3}\right| = \dfrac{1}{4} bh^2 \sigma_s \Rightarrow P_f = \dfrac{3bh^2}{8L}\sigma_s$ (3)

Flytlastförhöjning

$p = \dfrac{P_f - P_s}{P_s} = \dfrac{1}{2} = 50\%$

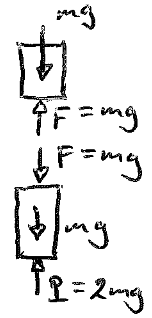
Svar: $P_s = \dfrac{bh^2}{4L}\sigma_s$; $P_f = \dfrac{3bh^2}{8L}\sigma_s$; $p = 50\%$

4) Medelradie: $a = \frac{D+d}{4}$

Väggtjocklek: $h = \frac{D-d}{2}$

Tvärsnittsarea: $A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$

Jämvikt:



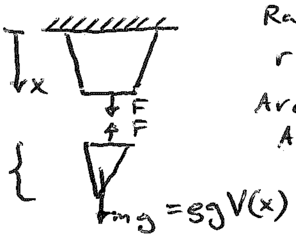
$$\sigma_{ax,övre} = \frac{pa}{2h} = \frac{P}{4}\frac{D+d}{D-d} = \frac{207\times10^3}{4}\frac{66+65{,}8}{66-65{,}8} = \underline{\underline{34{,}1 \text{ MPa}}}$$

$$\sigma_{ax,undre} = -\frac{F}{A} + \frac{pa}{2h} = \frac{pa}{2h} - \frac{mg}{\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)} = \underline{\underline{33{,}9 \text{ MPa}}}$$

Stapling: $n\cdot\frac{F}{A} \geq \frac{pa}{2h} \Rightarrow p\frac{(D+d)(D^2-d^2)\pi}{16(D-d)mg} \approx \underline{\underline{185 \text{ st}}}$

Svar: Axiell spänning är 34,1 MPa (övre burk) och 33,9 MPa (nedre burk). För att få tryckspänning i den nedre burken måste 185 burkar staplas.

5) a)



Radievariation: $r(x) = \frac{D}{2}(1-x)$

Areavariation: $A(x) = \pi r(x)^2$

Volym: $V(x) = \frac{\pi r(x)^2 (L-x)}{3}$

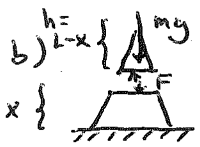
Hooke: $\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E}$

där $\sigma(x) = \frac{\rho g V(x)}{A(x)} = \frac{\rho g}{3}(L-x)$

dvs $\varepsilon(x) = \frac{\rho g}{3E}(L-x)$

Längdändring: $\delta = \int_0^L \varepsilon(x)dx = \underline{\underline{\frac{\rho g L^2}{6E}}}$

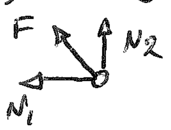
b)



Beräkningarna blir desamma som i a)!

Svar: a) och b) ger samma längdändring $\rho g L^2/6E$

6) Frilägg knutpunkten och bestäm stångkrafterna:



$(\uparrow)\ N_2 + F\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow N_2 = -\frac{F}{\sqrt{2}}$

$(\rightarrow)\ -N_1 - F\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow N_1 = -\frac{F}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow N_1 = N_2$

Knäckning riskeras enligt Eulerfall 2 då $N_1 = N_2 = P_k = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ när $F = F_k$

dvs $\frac{F_k}{\sqrt{2}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow F_k = \sqrt{2}\frac{\pi^2 EI}{L^2}$

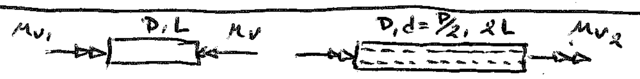
Svar: Knäckning riskeras i någon av stängerna då $F = \sqrt{2}\frac{\pi^2 EI}{L^2}$

7) Total töjning: $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^T + \varepsilon^c = \frac{\sigma}{E} + \alpha\Delta T + 10^{-7}h^{-1}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{cT}}\right)^n \cdot t$

$$= \frac{100 \text{ N}}{E\pi(1\times10^{-3})^2 \text{ mm}^2} + 650\cdot14\times10^{-6} + 10^{-7}\left(\frac{\frac{100}{\pi(1\times10^{-3})^2}}{34\times10^6}\right)^5 (30\cdot24) = 0{,}0093$$

Svar: Den totala töjningen blir 0,0093

8) Momentjämvikt:



$M_{v_1} - M_v + M_{v_2} = 0 \Rightarrow M_v = M_{v_1} + M_{v_2}$ (1)

Deformationsvillkor: $\varphi_1 = \varphi_2$ där $\varphi_1 = \frac{M_{v_1}L}{GK_1}$ och $\varphi_2 = \frac{M_{v_2}2L}{GK_2}$

och $K_1 = \frac{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^4}{2}$, $K_2 = \frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \left(\frac{D}{4}\right)^4\right]$

$\Rightarrow M_{v_1} = 2\frac{K_1}{K_2}M_{v_2}$

$\Rightarrow M_{v_1} = \frac{32}{15}M_{v_2}$ (2)

(1) & (2): $M_v = \left(\frac{32}{15} + \frac{15}{15}\right)M_{v_2} \Rightarrow M_{v_2} = \frac{15}{47}M_v$ och $M_{v_1} = \frac{32}{47}M_v$

Förvridning: $\varphi_1 = \frac{M_{v_1}L}{GK_1} = \frac{32}{47}M_v \cdot \frac{L}{G}\cdot\frac{2}{\pi\frac{D^4}{16}} = \frac{M_v L}{G\pi D^4}\frac{1024}{47}$

Svar: Förvridningen blir $\frac{1024}{47}\frac{M_v L}{G\pi D^4}$