

Tentamen i Hållfasthetslära AK1 2017-03-13

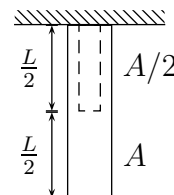
Tentand är skyldig att visa upp fotolegitimation. Om sådan inte medförts till tentamen skall den visas upp på Avdelningen för Hållfasthetslära senast en vecka efter tentamensdatum. Uppgifterna bedöms i hela poäng, varje uppgift ger maximalt 5 poäng och hela tentamen ger maximalt 30 poäng. För godkänt krävs minst 15 poäng.

Alla lösningar skall vara väl motiverade och ett tydligt svar skall anges till varje uppgift.

Tillåtna hjälpmedel: Den formelsamling i hållfasthetslära som ingår i anvisad kurslitteratur, tabeller av typ TEFYMA samt miniräknare.

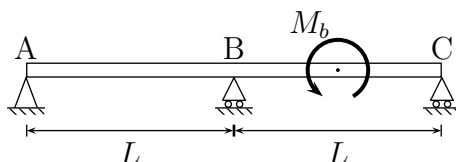
Uppgift 1

En stång med längden L hänger från ett tak och belastas enbart av tyngdkraften. Stången är urborrad till halva sin längd så att övre halvan utgörs av ett rör med tvärsnittsarean $A/2$ och undre halvan av en solid stång med tvärsnittsarean A . Bestäm stångens totala förlängning om materialet i stången har densiteten ρ och elasticitetsmodulen E .



Uppgift 2

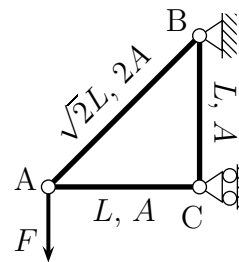
En balk med längden $2L$ är fritt upplagd på tre stöd. Beräkna utböjningen mitt på balkdelen AB på grund av det moturs böjande momentet M_b som angriper mitt på balkdelen BC. Ange tydligt åt vilket håll utböjningen räknas som positiv. Balkens böjstyvhet är EI och dess egenvikt kan försummas. Materialbeteendet är elastiskt.



Ledning: Problemet är statiskt obestämt och vinkeländringsmetoden kan användas för att hitta ett deformationsvillkor.

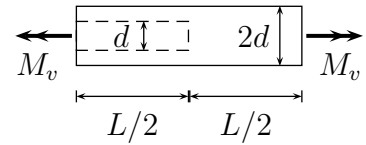
Uppgift 3

Ett stångsystem utgörs av tre stänger enligt figuren. I punkten A verkar en vertikal kraft F . Bestäm de tre stångkrafterna samt den vertikala förskjutningen av punkten A. Alla stängerna är gjorda av samma material med elasticitetsmodulen E . Stängerna AC och BC har tvärsnittsarean A och längden L medan stång AB har tvärsnittsarean $2A$ och längden $\sqrt{2}L$.



Uppgift 4

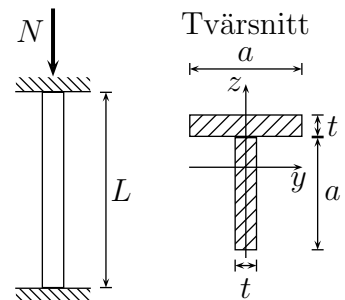
En massiv cirkulär axel med längden L och ytterdiametern $2d$ belastas med ett vridande moment M_v . Axeln är urborrad till halva sin längd med ett hål som har diametern d . Bestäm axelns totala förvridning φ om axelmaterialet ses som elastiskt med skjuvmodulen G . Bestäm flytlastförhöjningen β om axelmaterialet ses som elastiskt-idealplastiskt.



Uppgift 5

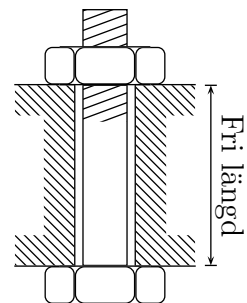
Ett tak hålls uppe av en sträva med längden $L = 2$ m. Strävan kan ses som fast inspänd i båda ändar. Strävan bär trycklasten $N = 1$ kN och är gjord av stål som har elasticitetsmodul $E = 206$ GPa och termisk längdutvidgningskoefficient $\alpha = 23 \times 10^{-6}$ $1/^\circ\text{C}$. Strävan har ett T-format tvärsnitt med måtten $a = 10$ cm och $t = 1$ cm, se figur.

Brand utbryter och temperaturen i strävan ökar. Vid vilken temperaturökning riskerar strävan att knäckas och sker knäckningen då kring y - eller z -axeln? Kraften N verkar längs strävas x -axel.



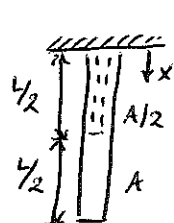
Uppgift 6

Du håller på att skriva en underhållsmanual till en gasturbin. På ett ställe i turbinen finns några skruvar som vid montering ges förspänningen $\sigma_0 = 50$ MPa mellan skruvhuvud och mutter. Skruvarna är tillverkade av rostfritt stål SIS 2337 och är under drift utsatta för en konstant temperatur på 650°C . Skruvarna måste dras åt på nytt när förspänningen på grund av krypning sjunkit till hälften. Vilket tidsintervall mellan åtdragning av skruvarna skall stå i manualen?



Ledning: Allt utom skruvens fria längd kan ses som stelt vilket gör att skruvens töjning är konstant efter montering.

- ① Betrakta undre och övre halvan av stängen separat



$$0 \leq x \leq \frac{L}{2} :$$

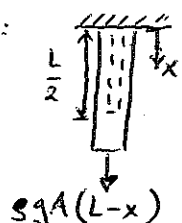


$$Sg \left(\frac{L}{2} A + \left[\frac{L}{2} - x \right] \frac{A}{2} \right) = Sg A \frac{1}{4} (3L - 2x) \quad [N]$$

Normaltöjning: $\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{Sg}{2E} (3L - 2x)$

Förlängning: $\delta = \int_0^{L/2} \epsilon dx = \frac{Sg}{2E} \int_0^{L/2} (3L - 2x) dx = \frac{5}{8} \frac{Sg L^2}{E} \quad (1)$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L :$$



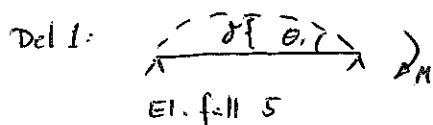
Normaltöjning: $\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{Sg}{E} (L - x)$

Förlängning: $\delta = \int_{L/2}^L \frac{Sg}{E} (L - x) dx = \frac{Sg L^2}{8E} \quad (2)$

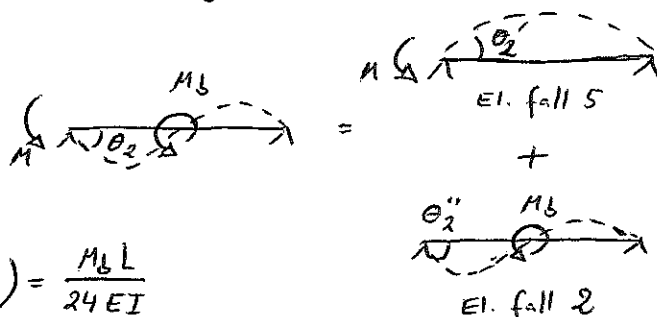
Total förlängning ges av (1) och (2): $\delta_{\text{tot}} = \frac{Sg L^2}{E} \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{4} \frac{Sg L^2}{E}$

Svar: Den totala förlängningen blir $\frac{3}{4} \frac{Sg L^2}{E}$

- ② Dela upp balken i elementarfall och utnyttja vinkeländringsmetoden (notera att problemet är statiskt obestämt).



Del 2:



$$\theta_1 = \frac{ML}{3EI}, \quad \theta_2' = \frac{ML}{3EI}, \quad \theta_2'' = \frac{M_b L}{6EI} \left(1 - 3 \frac{1}{4} \right) = \frac{M_b L}{24EI}$$

$$\theta_2 = -\theta_2' + \theta_2'' = -\frac{ML}{3EI} + \frac{M_b L}{24EI} = \frac{L}{3EI} \left(\frac{M_b}{8} - M \right)$$

Deformationsvillkor:

$$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \frac{ML}{3EI} = \frac{L}{3EI} \left(\frac{M_b}{8} - M \right) \Rightarrow M = \frac{1}{16} M_b \quad (1)$$

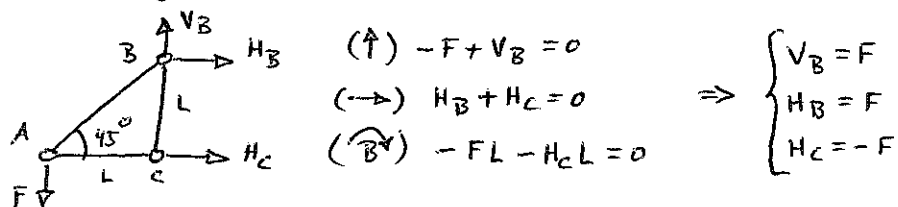
Sökt utböjning ges av vänstra balkdelen ("del 1") och elementarfall 5:

$$\delta = \frac{L^2}{6EI} \left[M \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) \right] = \frac{3ML^2}{48EI} \quad (2)$$

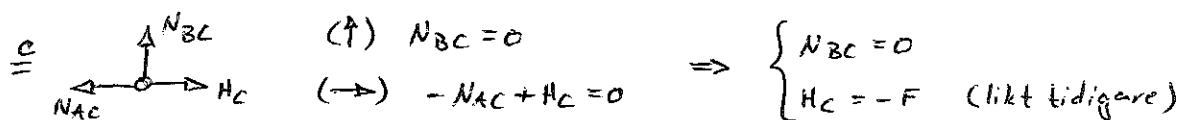
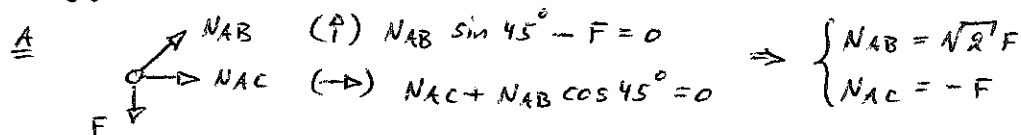
$$(1) \& (2): \delta = \frac{3L^2}{48EI} \frac{M_b}{16} = \frac{3M_b L^2}{768EI}$$

Svar: Utböjningen mitt på balkdelen AB blir $\frac{3M_b L^2}{768EI}$ uppåt.

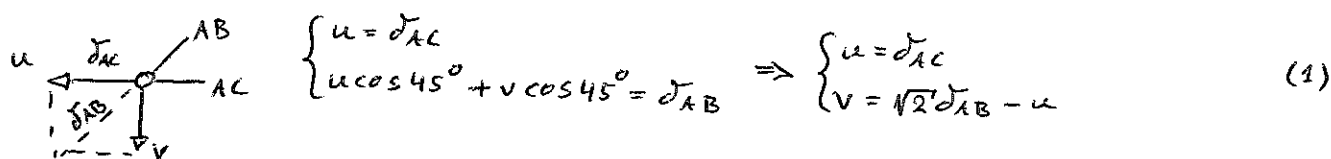
③ Fritlägg stångsystemet och ställ upp jämviktsuttryck för stödreaktionskrafterna:



Fritlägg knutpunkterna



Deformation

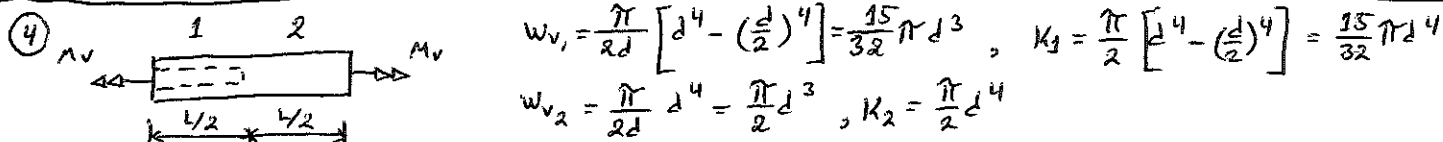


$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{2A} = \frac{\sqrt{2}F}{2A}, \quad \epsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E} = \frac{\sqrt{2}F}{2AE}, \quad \delta_{AB} = L_{AB} \epsilon_{AB} = \sqrt{2}L \frac{\sqrt{2}F}{2AE} \quad (2)$$

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{A} = -\frac{F}{A}, \quad \epsilon_{AC} = \frac{\sigma_{AC}}{E} = -\frac{F}{AE}, \quad \delta_{AC} = L_{AC} \epsilon_{AC} = -\frac{FL}{EA} \quad (3)$$

$$(1)-(3): \quad v = \sqrt{2} \frac{FL}{EA} - \left(-\frac{FL}{EA}\right) = \frac{FL}{EA} (1 + \sqrt{2})$$

Svar: Den vertikala förskjutningen blir $\frac{FL}{EA} (1 + \sqrt{2})$ nedåt.



Flytmoment: $\tau_{max} = \frac{M_v}{W_v}$ och $W_{v1} < W_{v2}$, d.v.s. del 1 plasticeras först
 $M_{vs} = \tau_s W_{v1} = \tau_s \frac{15}{32} \pi d^3$

Förvridning: $\varphi_1 = \frac{M_v L}{2G K_1}$, $\varphi_2 = \frac{M_v L}{2G K_2}$, $\varphi_{tot} = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{M_v L}{2G} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) = \frac{31}{15} \frac{M_v L}{\pi d^4 G}$

Gränsmoment: $M_{vf1} = \frac{2\pi}{3} \tau_s \left[d^3 - \left(\frac{d}{2}\right)^3 \right] = \frac{7\pi}{12} \tau_s d^3$

$M_{vf2} = \frac{2\pi}{3} \tau_s d^3$

$M_{vf1} < M_{vf2}$, d.v.s. del 1 når gränslasten först

Flytlastförhöjning: $\beta = \frac{M_{vf1} - M_{vs}}{M_{vs}} = \frac{\frac{7\pi}{12} \tau_s d^3 - \frac{15\pi}{32} \tau_s d^3}{\frac{15\pi}{32} \tau_s d^3} = \frac{11}{45} \approx 0,244 = 24,4\%$

Svar: Totalförvridning blir $\frac{31}{15} \frac{M_v L}{\pi d^4 G}$ och flytlastförhöjningen blir 24,4%.

⑤ P.g.a. inspänningarna riskeras knäckning enl. Eulerfall 4:

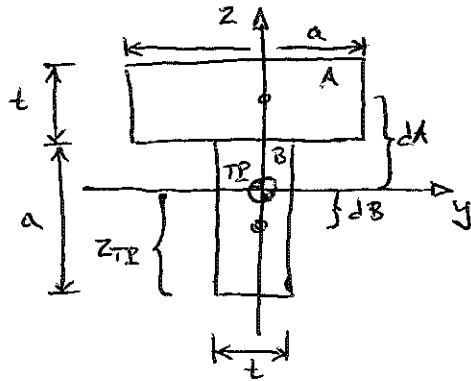
$$P_k = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (1)$$

Total töjning: $\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T = 0$ p.g.a. fasta inspänningar, div.s.

$\sigma = -\alpha E \Delta T$ p.g.a. temperaturökningen

Total axiell last: $P = -\alpha E \Delta T A - N \quad (2)$

Beräkna areatröghetsmoment för tvärsnittet och identifiera kring vilken axel balken är som vekast.



Rektanglarnas area: $A = 2at$

$$z_{TP} \cdot 2at = \frac{1}{2} a \cdot at + (a + \frac{1}{2}t)at \Rightarrow z_{TP} = \frac{1}{4}(3a+t)$$

$$I_y = I_{yA} + I_{yB} = \frac{at^3}{12} + \underbrace{\left(a + \frac{t}{2} - z_{TP}\right)^2}_{I_{yA}} at + \underbrace{\frac{ta^3}{12} + \left(z_{TP} - \frac{a}{2}\right)^2}_{I_{yB}} at = \frac{at}{12} \left[\frac{5}{3}(a^2+t^2) + 3at \right]$$

$$I_z = I_{zA} + I_{zB} = \frac{ta^3}{12} + \frac{at^3}{12} = \frac{at}{12} (a^2+t^2)$$

Böjstyvheten ges av EI och eftersom $I_y > I_z$ sker knäckning lättast kring z -axeln. Knäckning riskeras då $P \geq P_k$ när $\Delta T = \Delta T_k$, div.s. (1) och (2) ger

$$A\alpha E \Delta T_k + N = \frac{4\pi^2 EI_z}{L^2} \Rightarrow \Delta T_k = \left(\frac{4\pi^2 E \frac{at}{12} (a^2+t^2)}{L^2} - N \right) \frac{1}{\alpha E at} = 180,5^\circ\text{C}$$

Svar: Vid en temperaturökning på $180,5^\circ\text{C}$ riskeras knäckning.

⑥ Materialdata: $E = 147 \text{ GPa}$, $n = 4$, $\sigma_{c7} = 304 \text{ MPa}$

Total töjning: $\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^c$ där $\epsilon^e = \frac{\sigma}{E}$ och $\epsilon^c = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{c7}} \right)^n$, $\tau = 10^7 \text{ h}$

Derivera m.a.p. tid: $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^c$ där $\dot{\epsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E}$

Töjningen kan enligt uppgift ses som konstant, div.s. $\dot{\epsilon} = 0$:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{c7}} \right)^n = 0$$

Separera differentialekvationen i σ resp. t :

$$\frac{d\sigma}{dt} = - \frac{E}{2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{c7}} \right)^n \Rightarrow \frac{1}{\sigma^n} d\sigma = - \frac{E}{2\sigma_{c7}^n} dt \Rightarrow \int_{\sigma_0}^{\sigma(t)} \frac{1}{\sigma^n} d\sigma = - \frac{E}{2\sigma_{c7}^n} \int_0^t dt$$

Använd $n=4$ och integrera

$$\left[-\frac{1}{3\sigma^3} \right]_{\sigma_0}^{\sigma(t)} = -\frac{1}{3\sigma(t)^3} + \frac{1}{3\sigma_0^3} = -\frac{E}{2\sigma_{c7}^4} t$$

$$\Rightarrow t = \frac{2\sigma_{c7}^4}{3E} \left[\frac{1}{\sigma(t)^3} - \frac{1}{\sigma_0^3} \right]$$

Åtdragning skall ske då $\sigma(t) = \frac{1}{2} \sigma_0 = 25 \text{ MPa}$, div.s.

$$t = \frac{10^7 (30 \times 10^6)^4}{3(147 \times 10^9)} \left[\frac{1}{(25 \times 10^6)^3} - \frac{1}{(50 \times 10^6)^3} \right] \text{ h} = 1028,6 \text{ h} \approx 43 \text{ dygn}$$

Svar: Skruvarna måste spännas med ett intervall på 43 dygn.