Tentamen i Hållfasthetslära AK1 2017-04-18

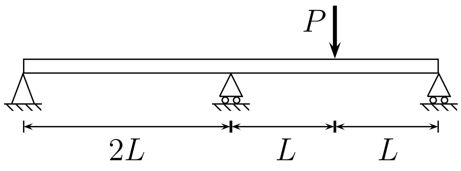
Tentand är skyldig att visa upp fotolegitimation. Om sådan inte medförts till tentamen skall den visas upp på Avdelningen för Hållfasthetslära senast en vecka efter tentamensdatum. Uppgifterna bedöms i hela poäng, varje uppgift ger maximalt 5 poäng och hela tentamen ger maximalt 30 poäng. För godkänt krävs minst 15 poäng.

Alla lösningar skall vara väl motiverade och ett tydligt svar skall anges till varje uppgift.

Tillåtna hjälpmedel: Den formelsamling i hållfasthetslära som ingår i anvisad kurslitteratur, tabeller av typ TEFYMA samt miniräknare.

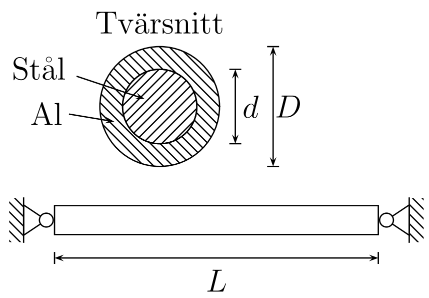
Uppgift 1

En balk med längden $4L$ och böjstyvheten EI är upplagd på tre stöd och belastas med en punktkraft P enligt figuren. Bestäm böjmomentfördelningen i balken och visa ditt resultat i ett momentdiagram.



Uppgift 2

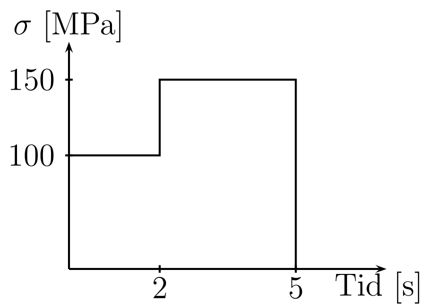
En balk med längden $L = 1$ m är tillverkad av en massiv cylindrisk del av normaliserat kolstål 141650-01 som har diametern $d = 11$ mm. Stålcylindern är utan glapp innesluten i ett cylindriskt rör av varmåldrat aluminium SS 4212-06. Rörets ytterdiameter är $D = 16$ mm. Den sammansatta balken är spänningsfritt monterad mellan två stela väggar enligt figur. Beräkna den temperaturökning som ger upphov till knäckning av balken.



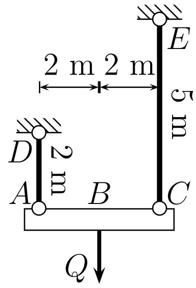
Ledning: Böjstyvheten EI beräknas som summan av de två tvärsnittens böjstyvheter.

Uppgift 3

Ett visst material kan beskrivas med en Maxwell-modell med elasticitetsmodulen $E = 12$ GPa och viskositetsmodulen $\eta = 5$ GPa·s. Materialet utsätts under 5 s för en belastning som varierar enligt figuren och därefter sker avlastning. Beräkna den största töjningen under belastningen.



Uppgift 4

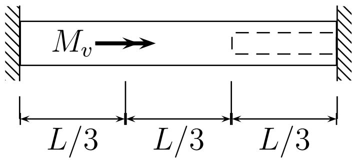


En stel balk ABC hänger i två stycken stänger AD och CE som har tvärsnittsareorna 400 mm^2 respektive 500 mm^2. Stång AD har längden 2 m och stång CE har längden 5 m. Materialet i stängerna kan ses som elastiskt-idealplastiskt med elasticitetsmodulen $E = 200$ GPa och sträckgränsen $\sigma_s = 300$ MPa. Balken hänger från början horisontellt men på grund av kraften Q förskjuts balkens mittpunkt B 10 mm nedåt.

a) Beräkna den erfoderliga maximala kraften Q och tillhörande värden på förskjutningarna i punkterna A och C.

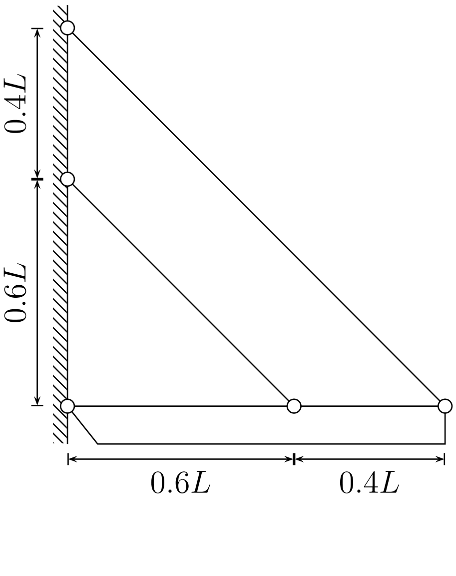
b) Om balken avlastas helt från tillståndet som bestämdes i uppgift a, beräkna de kvarstående förskjutningarna i punkterna A och C.

Uppgift 5



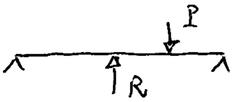
En elastisk stång med längden L och skjuvmodulen G är fast inspänd i båda ändar. Stången är belastad med ett vridande moment M_v som angriper på avståndet $L/3$ från vänster ändpunkt. Den vänstra delen av stången (med längden $2L/3$) har ett massivt cirkulärt tvärsnitt med radien R. Den högra delen av stången (med längden $L/3$) har en cirkulär hålprofil med ytterradien R och innerradien $R/2$. Bestäm den maximala skjuvspänningen i stången och ange var i stången den uppträder.

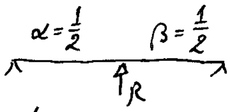
Uppgift 6

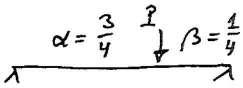


En horisontell bom med tyngden $Q = 10$ kN och längden $L = 4$ m bärs av två sneda linor. Båda linorna har tvärsnittsdiametern $d = 10$ mm. På grund av krypning i linorna sjunker bommen. Med vilken hastigher sjunker bommens högra ände? Bommen kan ses som stel och linornas krypbeteende kan beskrivas med hjälp av Nortons kryplag $\dot{\varepsilon} = 10^{-7}\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_{c7}}\right)^n$ h^{-1} där $n = 2.5$ och $\sigma_{c7} = 25$ MPa.

① Ersätt stödet i mitten med en uppåtriktad kraft och beräkna m.h.a. elementarfall nedböjningen δ_{mitt} vid balkens mittpunkt. Eftersom $\delta_{mitt}=0$ ges ett deformationsvillkor varur stödkraften kan bestämmas, uttryckt i P.



=


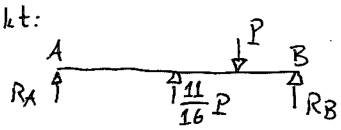
+


El. fall 1

$$\delta'_{mitt}(\xi=\alpha)=\frac{4}{3}\frac{RL^3}{EI} \qquad \delta''_{mitt}\left(\xi=\tfrac{1}{2}\right)=\frac{11}{12}\frac{PL^3}{EI}$$

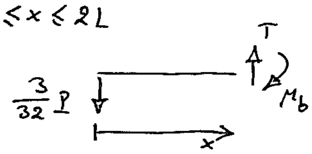
$$\delta_{mitt}=\delta'_{mitt}-\delta''_{mitt}=0 \Rightarrow \frac{4}{3}\frac{RL^3}{EI}-\frac{11}{12}\frac{PL^3}{EI}=0 \Rightarrow \underline{R=\frac{11}{16}P}$$

Jämvikt:



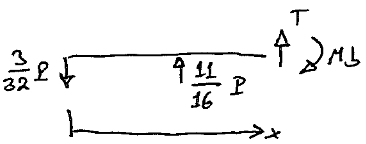
$$(\uparrow)\quad R_A+R_B+\frac{11}{16}P-P=0$$
$$(\overset{\curvearrowright}{A})\quad -\frac{11}{16}P\cdot 2L+3PL-4LR_B=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} R_A=-\dfrac{3}{32}P \\ R_B=\dfrac{13}{32}P \end{cases}$$

Snitt: $0\leq x\leq 2L$



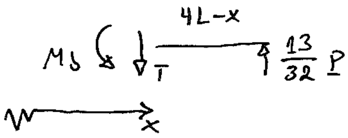
$$(\uparrow)\quad T-\frac{3}{32}P=0 \Rightarrow T=\frac{3}{32}P$$
$$(\overset{\curvearrowright}{x})\quad -\frac{3}{32}Px+M_b=0 \Rightarrow M_b=\frac{3}{32}Px$$

Snitt: $2L\leq x\leq 3L$



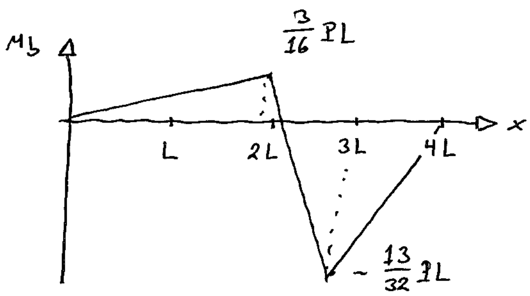
$$(\uparrow)\quad -\frac{3}{32}P+\frac{11}{16}P+T=0 \Rightarrow T=-\frac{19}{32}P$$
$$(\overset{\curvearrowright}{x})\quad -\frac{3}{32}Px+\frac{11}{16}P(x-2L)+M_b=0 \Rightarrow M_b=\frac{P}{8}\left(11L-\frac{19}{4}x\right)$$

Snitt: $3L\leq x\leq 4L$



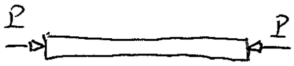
$$(\uparrow)\quad -T+\frac{13}{32}P=0 \Rightarrow T=\frac{13}{32}P$$
$$(\overset{\curvearrowright}{x})\quad -M_b-\frac{13}{32}P(4L-x)=0 \Rightarrow M_b=\frac{13}{32}P(x-4L)$$

Svar:



(2) Materialdata: $\begin{cases} \text{Stål:} & E_{st} = 206\text{ GPa}, \quad \alpha_{st} = 11\times10^{-6}\ 1/^\circ C \\ \text{Aluminium:} & E_{Al} = 70\text{ GPa}, \quad \alpha_{Al} = 23\times10^{-6}\ 1/^\circ C \end{cases}$

Tvärsnittsstorheter: $\begin{cases} A_{st} = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4} \approx 95\text{ mm}^2 \\ I_{st} = \frac{\pi (d/2)^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \approx 719\text{ mm}^4 \\ A_{Al} = \pi\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right] \approx 106\text{ mm}^2 \\ I_{Al} = \frac{\pi}{4}\left[\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \left(\frac{d}{2}\right)^4\right] \approx 2498\text{ mm}^4 \end{cases}$

Jämvikt: 

$P = P_{Al} + P_{st}$ (1)

Def. villkor: $\delta_{Al} = \varepsilon_{Al}\cdot L = 0$

$\delta_{st} = \varepsilon_{st}\cdot L = 0$

Materialsamband: $\varepsilon_{Al} = \alpha_{Al}\,\Delta T - \frac{P_{Al}}{E_{Al}A_{Al}}$

$\varepsilon_{st} = \alpha_{st}\,\Delta T - \frac{P_{st}}{E_{st}A_{st}}$

$\Rightarrow$ $P_{Al} = E_{Al}\,A_{Al}\,\alpha_{Al}\,\Delta T$, $P_{st} = E_{st}\,A_{st}\,\alpha_{st}\,\Delta T$ (2)

(1) & (2): $P = \left(E_{Al}A_{Al}\alpha_{Al} + E_{st}A_{st}\alpha_{st}\right)\Delta T$ (3)

Knäckkraft enligt Eulerfall 2: $P_k = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ där $EI = E_{Al}I_{Al} + E_{st}I_{st}$ (4)

(3) & (4): $P = P_k \Rightarrow \Delta T = \Delta T_k \Rightarrow \Delta T_k = \frac{\pi^2}{L^2}\left(E_{Al}I_{Al} + E_{st}I_{st}\right)\frac{1}{E_{Al}A_{Al}\alpha_{Al} + E_{st}A_{st}\alpha_{st}} = \underline{\underline{8,26\ ^\circ C}}$

<u>Svar:</u> Knäckning riskeras vid en temperaturökning på 8.3°C.

---

(3) Ett Maxwellmaterial beskrivs av $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$

Integrera och låt $\sigma = \sigma_0$ vara konstant: $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta}t$

Om spänningen hålls konstant kommer töjningen att öka med tiden.

Med $\sigma_0 = 100$ MPa ges töjningen

$$\frac{100}{12\,000} + \frac{100}{5000}\cdot 5 = 0{,}1083$$

Till detta kommer ytterligare 50 MPa under 3 s vilket ger töjningsbidraget

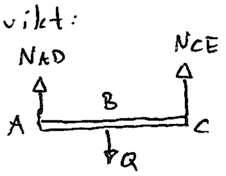
$$\frac{50}{12000} + \frac{50}{5000}\cdot 3 = 0{,}0342$$

Total töjning är $0{,}1083 + 0{,}0342 = \underline{0{,}143}$ som också är maxvärdet eftersom töjningen minskar vid avlastning.

<u>Svar:</u> Den största töjningen är 0.143.

---

(4) Jämvikt:



$(\uparrow)$ $N_{AD} + N_{CE} = Q$
$(\overset{\curvearrowleft}{A})$ $2Q - 4N_{CE} = 0$ $\Rightarrow$ $N_{AD} = N_{CE} = \frac{Q}{2}$ (1)

a) Spänningen är störst i AD där tvärsnittsarean är minst. Stång AD plasticeras först och då är $\sigma_{AD} = \sigma_s = 300\ MPa$

(1) ger: $\sigma_{AD} A_{AD} = \sigma_{CE} A_{CE} \Rightarrow \sigma_{CE} = \sigma_{AD} \frac{A_{AD}}{A_{CE}} = \frac{4}{5}\, 300\ MPa = 240\ MPa$

och även $Q = \sigma_{AD} A_{AD} + \sigma_{CE} A_{CE} = (300 \cdot 400 + 240 \cdot 500)\ N = \underline{\underline{240\ kN}}$

Förlängningar: $\delta_{AD} = \varepsilon_{AD} L_{AD} = \frac{\sigma_{AD}}{E} L_{AD} = \frac{300}{200 \times 10^3} \cdot 2\ m = \underline{\underline{3\ mm}}$

$\delta_{EC} = \varepsilon_{EC} L_{EC} = \frac{\sigma_{EC}}{E} L_{EC} = \frac{240}{200 \times 10^3} \cdot 5\ m = \underline{\underline{6\ mm}}$

Utan att öka kraften Q kan $\delta_B = 10\ mm$ nås genom att stång AD töjs plastiskt.

Deformationsvillkor: $\delta_B = \frac{1}{2}(\delta_{AB} + \delta_{CE})$

Eftersom all deformation nu sker i stång AD som "kollapsat" är $\delta_{CE} = 6\ mm$ konstant och $\delta_{AD} = 2\delta_B - \delta_{CE} = 2 \cdot 10\ mm - 6\ mm = \underline{\underline{14\ mm}}$

b) Elastisk avlastning ger: $\begin{cases} \delta_A = 14\ mm - 3\ mm = 11\ mm \\ \delta_C = 6\ mm - 6\ mm = 0 \end{cases}$

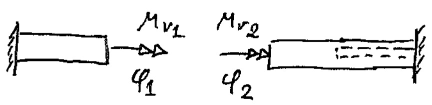
Svar: a) $Q = 240\ kN$, $\delta_A = 3\ mm$, $\delta_C = 6\ mm$
b) $\delta_A = 11\ mm$, $\delta_C = 0$

---

(5) Låt ett index r beteckna rördelen och m den massiva delen. Tvärsnittsstorheter ges av

$K_m = \frac{\pi}{2} R^4$, $K_r = \frac{\pi}{2}\left(R^4 - \left(\frac{R}{2}\right)^4\right) = \frac{15}{16} K_m$, $W_m = \frac{\pi}{2} R^3$, $W_r = \frac{15}{16} W_m$

Snitta genom momentets angreppspunkt, frilägg och ställ upp momentjämvikt



$M_{v1} + M_{v2} = M_v$ (1)

Deformationsvillkor: $\varphi_1 = \varphi_2$ (2)

Förvridningar: $\varphi_1 = \frac{M_{v1}\, L/3}{G K_m}$ och $\varphi_2 = \frac{M_{v2} \cdot L/3}{G K_m} + \frac{M_{v2} \cdot L/3}{G K_r}$ (3)

(2) & (3) $\frac{M_{v1}}{K_m} = M_{v2}\left(\frac{1}{K_m} + \frac{1}{K_r}\right)$ (4)

(1) & (4) $\frac{M_v}{K_m} - \frac{M_{v2}}{K_m} = \frac{M_{v2}}{K_m} + \frac{M_{v2}}{K_r} \Rightarrow M_{v2} = \frac{K_r}{2K_r + K_m} M_v$

Med $K_r = \frac{15}{16} K_m$ ges nu $M_{v2} = \frac{15}{46} M_v$

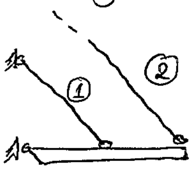
och $M_{v1} = M_v - M_{v2} \Rightarrow M_{v1} = \frac{31}{46} M_v$

$\tau_{vm} = \frac{M_{v1}}{W_m}$ och $\tau_{vr} = \frac{M_{v2}}{W_r} \Rightarrow \frac{\tau_{vm}}{\tau_{vr}} = \frac{M_{v1}}{W_m} \frac{W_r}{M_{v2}} = \frac{31}{16}$ D.v.s. påkänningen är störst i den massiva vänstra axeldelen

$\tau_{max} = \frac{M_{v1}}{W_m} = \frac{31}{46} M_v \cdot \frac{2}{\pi R^3} = \underline{\underline{\frac{31 M_v}{23 \pi R^3}}}$

Svar: Maximal skjuvspänning är $\frac{31 M_v}{23 \pi R^3}$ och uppträder i den massiva vänstra axeldelen.

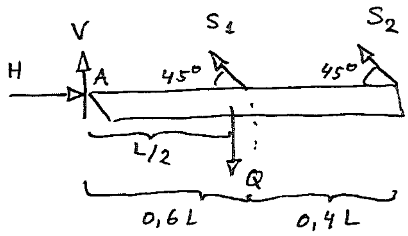
⑥ Beteckningar



$\frac{L_1}{\sqrt{2}} = 0{,}6\,L$ och $\frac{L_2}{\sqrt{2}} = L$

Linkrafter: S_1 och S_2

Frilägging



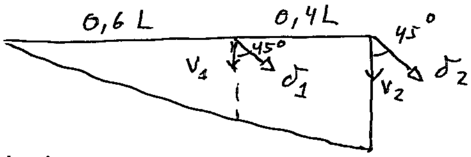
Jämvikt

$$(\uparrow)\quad V - Q + \frac{S_1}{\sqrt{2}} + \frac{S_2}{\sqrt{2}} = 0 \qquad (1)$$

$$(\overset{\curvearrowright}{A})\quad -\frac{S_1}{\sqrt{2}}\,0{,}6L - \frac{S_2}{\sqrt{2}}L + 0{,}5\,QL = 0 \qquad (2)$$

$$(\rightarrow)\quad H - \frac{S_1}{\sqrt{2}} - \frac{S_2}{\sqrt{2}} = 0 \qquad (3)$$

Problemet är statiskt obestämt. Ett deformationsvillkor ges av



$$\frac{\delta_1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{0{,}6L} = \frac{\delta_2}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{L} \Rightarrow \delta_1 = 0{,}6\,\delta_2 \qquad (4)$$

Kinematiska samband:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\delta_1}{L_1} = \frac{\delta_1}{\sqrt{2}\,0{,}6L} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\delta_2}{L_2} = \frac{\delta_2}{\sqrt{2}\,L} \\ (4)&: \delta_1 = 0{,}6\,\delta_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_2 \qquad (5)$$

Materialsamband – Nortons lag:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= 10^{-7}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{c7}}\right)^n \\ \dot{\varepsilon}_2 &= 10^{-7}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{c7}}\right)^n \\ (5)&: \dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow S_1 = S_2 \qquad (6)$$

(2) & (6):
$$S_1 = S_2 = \frac{\sqrt{2}\,0{,}5\,Q}{1{,}6} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sqrt{2}\cdot 0{,}5}{1{,}6}\,Q\,\frac{1}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2} = [Q = 10\,kN] = \underline{\underline{56{,}27\,MPa}}$$

Högra balkändens vertikala hastighet:

$$\dot{v} = \frac{\dot{\delta}_2}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}\,\dot{\delta}_2 \quad \text{där} \quad \dot{\delta}_2 = \dot{\varepsilon}_2 L_2 = 10^{-7}\left(\frac{56{,}27\times10^6}{25\times10^6}\right)^{2{,}5}\underbrace{\sqrt{2}\cdot 4}_{L_2} = \underline{\underline{43\times10^{-4}\,\frac{mm}{h}}}$$

d.v.s. $\dot{v} = 43\times10^{-4}\,\frac{mm}{h}\cdot\sqrt{2} = \underline{\underline{61\times10^{-4}\,\frac{mm}{h}}}$

Svar: Balkens högra ände sjunker med hastigheten $61\times10^{-4}\,\frac{mm}{h}$.