

Tentamen i Hållfasthetslära AK1 2017-08-17

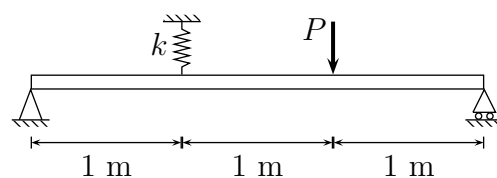
Tentand är skyldig att visa upp fotolegitimation. Om sådan inte medförts till tentamen skall den visas upp på Avdelningen för Hållfasthetslära senast en vecka efter tentamensdatum. Uppgifterna bedöms i hela poäng, varje uppgift ger maximalt 5 poäng och hela tentamen ger maximalt 30 poäng. För godkänt krävs minst 15 poäng.

Alla lösningar skall vara väl motiverade och ett tydligt svar skall anges till varje uppgift.

Tillåtna hjälpmedel: Den formelsamling i hållfasthetslära som ingår i anvisad kurslitteratur, tabeller av typ TEFYMA samt miniräknare.

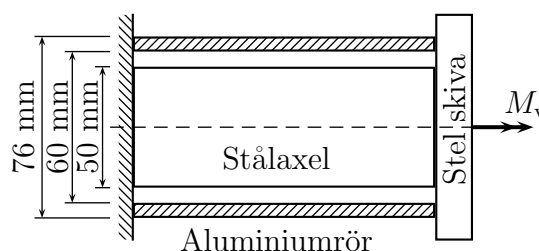
Uppgift 1

En 3 m lång balk är fritt upplagd på två stöd och belastas av en punktkraft P enligt figuren. I balken är även fäst en elastisk fjäder vars beteende beskrivs av fjäderkonstanten k . Bestäm kraften i fjädern på grund av kraften P om balkens böjstyvhets är EI .



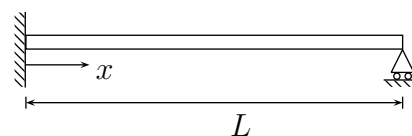
Uppgift 2

En massiv stålaxel och ett aluminiumrör är fast inspända i ena änden och fästa vid samma stela skiva i den andra änden, se figur. Hur stort vridande moment M_v kan läggas på skivan om den tillåtna skjuvspänningen är 120 MPa i stålaxeln och 70 MPa i aluminiumröret? Skjuvmodulen G kan antas vara 80 GPa för stål och 27 GPa för aluminium.



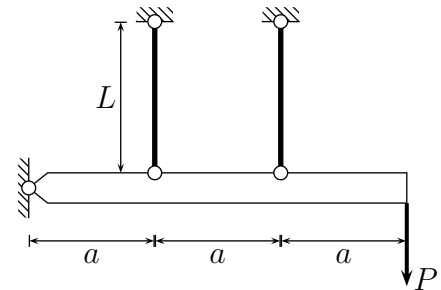
Uppgift 3

En balk med konstant tvärsnitt och längden L är fast inspänd i sin ena ände och fritt upplagd i den andra. Den enda belastningen på balken utgörs av dess egenvikt. För vilken koordinat x blir nedböjningen som störst? Använd den elastiska linjens differentialekvation för att hitta lösningen.



Uppgift 4

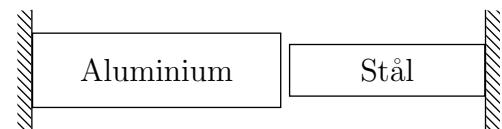
En stel horisontell balk med längden $3a$ hänger i två stycken idealplastiska stänger som har samma tvärsnittsarea A , sträckgräns σ_s och längd L . Balkens vänstra ände är ledat infäst och balken belastas med en nedåtriktad vertikal kraft P i den fria högra änden. Följande deluppgifter skall lösas:



- Bestäm förhållandet mellan den maximala lasten P_f som konstruktionen kan bära och den last P_s som initierar plasticitet i någon av de två stängerna.
- Efter att den maximala lasten P_f uppnåtts avlastas konstruktionen helt. Bestäm restspänningarna i de två stängerna.

Uppgift 5

Vid temperaturen 20°C finns det ett glapp på 1 mm mellan de två stängerna i figuren. Hur mycket längre blir aluminiumstången om temperaturen ökas till 140°C ? De båda materialen kan antas bete sig linjärt elastiskt och följande data skall användas:

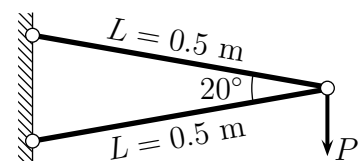


Aluminium:	$L = 300 \text{ mm}$	$A = 2000 \text{ mm}^2$	$E = 70 \text{ GPa}$	$\alpha = 23 \times 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C}$
Stål:	$L = 250 \text{ mm}$	$A = 800 \text{ mm}^2$	$E = 190 \text{ GPa}$	$\alpha = 18 \times 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C}$

Där L är stångens längd och A dess tvärsnittsarea. E och α är elasticitetsmodul respektive termisk expansionskoefficient.

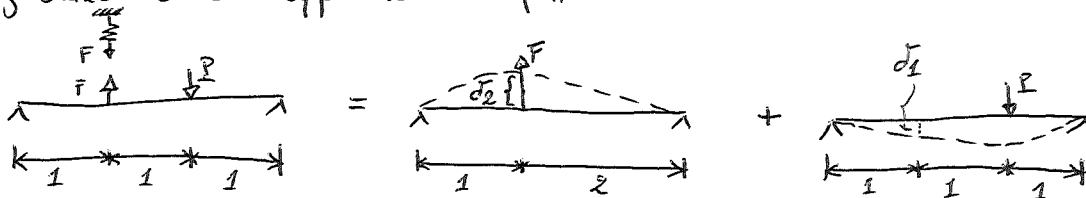
Uppgift 6

Ett fackverk består av två lika långa stänger med cirkulärt tvärsnitt, sammanfogade enligt figuren. Deras längd är $L = 0.5 \text{ m}$ och tvärsnittsradien är $R = 20 \text{ mm}$. Stängerna är tillverkade av ett stål som har elasticitetsmodulen $E = 205 \text{ GPa}$ och flytspänningen $\sigma_s = 420 \text{ MPa}$. Fackverket belastas med en kraft P i sin högra ändpunkt. Storleken på kraften P är sådan att säkerheten mot plasticering av fackverket är 1.5. Följande deluppgifter skall lösas:



- Hur stor är kraften P ?
- Hur stor är säkerheten mot knäckning?
- Hur stor är nedböjningen i punkten där kraften P angriper?

1) Fritlägg balken och dela upp i elementarfall



Elementarfall ger utböjningarna:

$$\delta_2 = \frac{F(3L)^3}{3EI} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \frac{FL^3}{EI} \quad (\alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{2}{3}) \quad (1)$$

$$\delta_1 = \frac{P(3L)^3}{6EI} \frac{1}{3} \left[\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^3 \right] = \frac{7}{18} \frac{PL^3}{EI} \quad (\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}, \xi = \frac{1}{3}) \quad (2)$$

För den elastiska fjädern gäller sambandet

$$\delta_e = \frac{F}{k} \quad (3)$$

Kinematiskt samband: $\delta_e = \delta_1 - \delta_2$ (4)

Sätt in (1)-(3) i (4) och lös ut kraften F i fjädern:

$$\frac{F}{k} = \frac{7}{18} \frac{PL^3}{EI} - \frac{4}{9} \frac{FL^3}{EI} \Rightarrow F \left(\frac{1}{k} + \frac{4}{9} \frac{L^3}{EI} \right) = \frac{7}{18} \frac{PL^3}{EI} \Rightarrow F = \frac{7PL^3}{\frac{18EI}{k} + 8L^3} \quad (5)$$

Notera att $L=1\text{m}$!

Svar: Kraften i fjädern är $\frac{7Pk}{18EI + 8k}$

2) Beräkna vridstyvhet och vridmotstånd

$$(GK)_{\text{stål}} = G_{\text{stål}} \frac{\pi}{32} D^4 = 80 \times 10^9 \frac{\pi}{32} (50 \times 10^{-3})^4 = 4,91 \times 10^4 \text{ Nm}^2$$

$$W_{\text{stål}} = \frac{\pi}{16} D^3 = \frac{\pi}{16} (50 \times 10^{-3})^3 = 2,45 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$(GK)_{\text{Al}} = G_{\text{Al}} \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = 27 \times 10^9 \frac{\pi}{32} [(76 \times 10^{-3})^4 - (60 \times 10^{-3})^4] = 5,41 \times 10^4 \text{ Nm}^2$$

$$W_{\text{Al}} = \frac{\pi}{16} (D^3 - d^3) = \frac{\pi}{16 \cdot 76 \times 10^{-3}} [(76 \times 10^{-3})^3 - (60 \times 10^{-3})^3] = 5,27 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

Jämvikt ger: $M_v = M_{v,\text{stål}} + M_{v,\text{Al}}$ (1)

Ett deformationsvillkor ges av att förvridningsvinkeln är densamma i båda delarna:

$$\frac{M_{v,\text{stål}} \cdot L}{(GK)_{\text{stål}}} = \frac{M_{v,\text{Al}} \cdot L}{(GK)_{\text{Al}}} \Rightarrow M_{v,\text{stål}} = \frac{(GK)_{\text{stål}}}{(GK)_{\text{Al}}} M_{v,\text{Al}} = \frac{4,91 \times 10^4}{5,41 \times 10^4} M_{v,\text{Al}}$$

$$\Rightarrow M_{v,\text{stål}} = 0,908 \cdot M_{v,\text{Al}} \quad (2)$$

Antag att maximalt tillåten skjarspänning uppnås i ståldelen först

$$\tau_{\text{stål}}^{\text{max}} = \frac{M_{v,\text{stål}}}{W_{v,\text{stål}}} \Rightarrow M_{v,\text{stål}} = \tau_{\text{stål}}^{\text{max}} \cdot W_{v,\text{stål}} = 120 \times 10^6 \cdot 2,45 \times 10^{-5} = 2,94 \times 10^3 \text{ Nm} \quad (3)$$

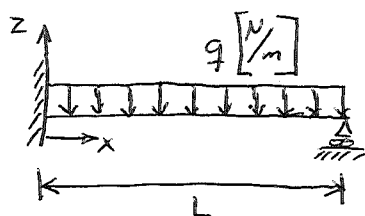
$$\text{Med (2) ges: } M_{v,\text{Al}} = \frac{M_{v,\text{stål}}}{0,908} = \frac{2,94 \times 10^3}{0,908} = 3,24 \times 10^3 \text{ Nm} \quad (4)$$

Kontrollera antagandet: $\tau_{\text{Al}} = \frac{M_{v,\text{Al}}}{W_{v,\text{Al}}} = \frac{3,24 \times 10^3}{5,27 \times 10^{-5}} = 61,4 \text{ MPa} < \tau_{\text{Al}}^{\text{max}} = 70 \text{ MPa}$ OK!

Sätt samman (1), (3) och (4): $M_v = 2,94 \times 10^3 + 3,24 \times 10^3 = 6,18 \times 10^3 \text{ Nm}$

Svar: Maximalt vridande moment är $M_v = 6180 \text{ Nm}$.

3)



Elastiska linjens ekvation:

$$EI w'''' = -q \quad (= \text{konstant}) \quad (1)$$

P.g.a. utböjningen går i negativ z-led.

Integrera (1): $EI w''' = -qx + A$

$$EI w'' = -\frac{1}{2}qx^2 + Ax + B \quad (2)$$

$$EI w' = -\frac{1}{6}qx^3 + \frac{1}{2}Ax^2 + Bx + C \quad (3)$$

$$EI w = -\frac{1}{24}qx^4 + \frac{1}{6}Ax^3 + \frac{1}{2}Bx^2 + Cx + D \quad (4)$$

Randvillkor: $w(0) = 0, w'(0) = 0$ ger med (3) och (4) att $C = D = 0$ (5) $w(L) = 0, w''(L) = 0$ (ty $M_b = -EI w''$ och $M_b(L) = 0$)

$$\text{ger med (2) och (4) att } \begin{cases} 0 = -\frac{1}{2}qL^2 + AL + B \\ 0 = -qL^2 + 4AL + 12B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{5}{8}qL \\ B = -\frac{1}{8}qL^2 \end{cases} \quad (6)$$

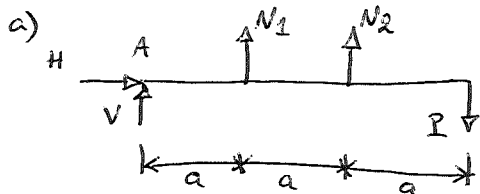
Störst nedböjning sker där $w'(x) = 0$, d.v.s. (3) ger

$$0 = -\frac{1}{6}qx^3 + \frac{1}{2}Ax^2 + Bx + C \quad \underbrace{C}_{=0} \Rightarrow -\frac{1}{6}qx^2 + \frac{1}{2}Ax + B = 0$$

som med (6) ger lösningen:

$$\underline{\text{Svar:}} \text{ Max utböjning sker vid } x = \frac{L}{16} [15 \pm \sqrt{33}] = 0,579L$$

4) Friägg den stela balken och ställ upp jämviktslikvationer:



$$(\rightarrow) H = 0$$

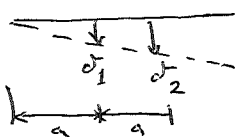
$$(\uparrow) V + N_1 + N_2 - P = 0$$

$$(\curvearrowright) 3Pa - N_1a - 2N_2a = 0$$

$$N_1 = \sigma_1 A, N_2 = \sigma_2 A$$

$$\Rightarrow \underline{\sigma_1 + 2\sigma_2 = \frac{3P}{A}} \quad (1)$$

Deformationsvillkor:



$$\delta_1 = \frac{1}{2}\delta_2, \quad \epsilon_1 = \frac{\delta_1}{L}, \quad \epsilon_2 = \frac{\delta_2}{L}$$

$$\Rightarrow \underline{\epsilon_1 = \frac{1}{2}\epsilon_2} \quad (2)$$

Materialsamband (Hookes lag):

$$\begin{cases} \sigma_1 = E\epsilon_1 \\ \sigma_2 = E\epsilon_2 \end{cases} \quad (3)$$

$$(3) \text{ i } (2): \quad \sigma_1 = \frac{1}{2}\sigma_2 \quad (4)$$

$$(4) \text{ i } (1): \quad \underline{\sigma_1 = \frac{3P}{5A}, \quad \sigma_2 = \frac{6P}{5A}} \quad (\text{elastisk lösning}) \quad (5)$$

 $\sigma_2 > \sigma_1$, d.v.s. plasticitet initieras då $\sigma_2 = \sigma_s$. Från (5) fås:

$$\underline{\sigma_s = \frac{6P}{5A} \Rightarrow P_s = \frac{5}{6}\sigma_s A} \quad (6)$$

Maximal last ges då både $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_s$. Insättning i (1) ger

$$\underline{\sigma_s + 2\sigma_s = \frac{3P_f}{A} \Rightarrow P_f = \sigma_s A} \quad (7)$$

$$(6) \text{ och } (7) \text{ ger: } \frac{P_f}{P_s} = \frac{\sigma_s A}{\frac{5}{6} \sigma_s A} = \underline{\underline{\frac{6}{5}}}$$

b) Från maxlasten $P = P_f$ sker avlastning elastiskt och (5) ger

$$\Delta \sigma_1 = -\frac{3P_f}{5A}, \quad \Delta \sigma_2 = -\frac{6P_f}{5A} \quad (8)$$

Spänningsändring: $\Delta \sigma = \sigma_{\text{efter}} - \sigma_{\text{före}}$, d.v.s.

$$\begin{cases} \Delta \sigma_1 = \sigma_{1,\text{efter}} - \sigma_s \\ \Delta \sigma_2 = \sigma_{2,\text{efter}} - \sigma_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{1,\text{efter}} = \Delta \sigma_1 + \sigma_s \\ \sigma_{2,\text{efter}} = \Delta \sigma_2 + \sigma_s \end{cases} \quad (9)$$

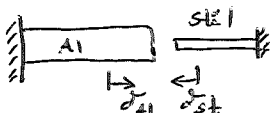
$$(8) \text{ och } (9) \text{ ger: } \begin{cases} \sigma_{1,\text{efter}} = -\frac{3P_f}{5A} + \sigma_s \\ \sigma_{2,\text{efter}} = -\frac{6P_f}{5A} + \sigma_s \end{cases} \quad (10)$$

(7) och (10) ger restspänningarna:

$$\begin{cases} \sigma_{1,\text{efter}} = -\frac{3}{5} \frac{\sigma_s A}{A} + \sigma_s = \underline{\underline{\frac{2}{5} \sigma_s}} \quad (\text{drag}) \\ \sigma_{2,\text{efter}} = -\frac{6}{5} \frac{\sigma_s A}{A} + \sigma_s = \underline{\underline{-\frac{1}{5} \sigma_s}} \quad (\text{tryck}) \end{cases}$$

Svar: a) Förhållandet är $P_f/P_s = \frac{6}{5}$

b) Restspänningar: $\frac{2}{5} \sigma_s$ i vänster stång och $-\frac{1}{5} \sigma_s$ i höger stång.

5)  $\sigma_{Al} + \sigma_{st} = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ Deformationsvillkor (1)

$$\begin{cases} \epsilon_{Al} = \frac{\sigma_{Al}}{E_{Al}} + \alpha_{Al} \Delta T \\ \epsilon_{st} = \frac{\sigma_{st}}{E_{st}} + \alpha_{st} \Delta T \end{cases} \quad \text{Materialsamband} \quad (2)$$

$$\text{Kinematik: } \begin{cases} \sigma_{Al} = \epsilon_{Al} L_{Al} \\ \sigma_{st} = \epsilon_{st} L_{st} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Sätt in (2) och (3) i (1): } \frac{\sigma_{Al}}{E_{Al}} L_{Al} + \alpha_{Al} \Delta T L_{Al} + \frac{\sigma_{st}}{E_{st}} L_{st} + \alpha_{st} \Delta T L_{st} = 10^{-3} \quad (4)$$

$$\text{Jämvikt: } \sigma_{Al} A_{Al} = \sigma_{st} A_{st} \Rightarrow \sigma_{st} = \frac{A_{Al}}{A_{st}} \sigma_{Al} \quad (5)$$

$$(4) \& (5): \sigma_{Al} = \frac{10^{-3} - (\alpha_{Al} L_{Al} + \alpha_{st} L_{st}) \Delta T}{\frac{L_{Al}}{E_{Al}} + \frac{L_{st}}{E_{st}} \frac{A_{Al}}{A_{st}}} \quad \text{och } \Delta T = 120^\circ \text{C ger } \underline{\underline{\sigma_{Al} = -48,6 \text{ MPa}}}$$

$$\text{Förlängning av aluminiumstången: } \sigma_{Al} = \left(\frac{\sigma_{Al}}{E_{Al}} + \alpha_{Al} \Delta T \right) L_{Al} = 6,2 \times 10^{-4} \text{ m} = \underline{\underline{0,62 \text{ mm}}}$$

Svar: Aluminiumstången förlängs 0,62 mm.

6) a) Frittägg knutpunkten där krafterna P angriper:

$$\begin{array}{c} N_1 \swarrow \\ \bullet \\ N_2 \nwarrow \quad \downarrow P \end{array} \quad (\rightarrow) -N_1 \cos 10^\circ - N_2 \cos 10^\circ = 0 \Rightarrow N_2 = -N_1 \quad (1)$$

$$(\uparrow) N_1 \cos 80^\circ - N_2 \cos 80^\circ - P = 0 \Rightarrow N_1 - N_2 = \frac{P}{\cos 80^\circ} \quad (2)$$

$$(1) \text{ och } (2) \quad N_1 = \frac{P}{2 \cdot \cos 80^\circ} \text{ och } N_2 = -N_1 \quad (3)$$

Vid plasticering är $N_{1s} = \sigma_s A = 528 \text{ kN}$. Säkerheten är 1,5, d.v.s.

$$N_1 = \frac{528 \times 10^3}{1,5} = \underline{352 \text{ kN}}$$

$$\text{Från (3) ges: } P = 2 \cos 80^\circ \cdot N_1 = \underline{122 \text{ kN}}$$

$$b) \text{ Eulerfall 2: } P_k = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 1020 \text{ kN}$$

Knäckning riskeras i den nedre stängen (här led 2) där

$$|N_2| = N_1 = 352 \text{ kN. Säkerheten mot knäckning är } \frac{1020 \text{ kN}}{352 \text{ kN}} = \underline{2,89}$$

$$c) \begin{array}{c} \delta_{2a} \\ \swarrow \quad \rightarrow \delta_H \\ 20^\circ \quad \bullet \quad \nearrow \delta_{1a} \\ \nwarrow \delta_V \quad \searrow 30^\circ \end{array} \quad \begin{cases} \delta_{1a} = \delta_H \cos 10^\circ + \delta_V \cos 80^\circ \\ \delta_{2a} = \delta_H \cos 10^\circ - \delta_V \cos 80^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_V = \frac{\delta_{1a} - \delta_{2a}}{2 \cos 80^\circ} \\ \delta_H = \frac{\delta_{1a} + \delta_{2a}}{2 \cos 80^\circ} \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Stängförlängningarna ges av: } \delta_{1a} = L \epsilon_1 = L \frac{\sigma_1}{E} = L \frac{N_1}{AE} = 6,54 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\text{Eftersom } N_2 = -N_1 \text{ gäller även } \delta_{2a} = -\delta_{1a} = -6,54 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\text{Insättning i (4) ger } \delta_V = 3,93 \text{ mm och } \delta_H = 0.$$

Svar:

$$a) \text{ Kraften är } P = 122 \text{ kN}$$

$$b) \text{ Säkerheten mot knäckning är } 2,89$$

$$c) \text{ Nedböjningen är } 3,93 \text{ mm}$$