

## Tentamen i Hållfasthetslära AK2 för M Torsdag 2015-06-04, kl. 8.00-13.00

Tentand är skyldig att visa upp fotolegitimation. Om sådan inte medförts till tentamen skall den vissas upp på Avdelningen för Hållfasthetslära senast måndagen den 8 juni 2015. 5-poängsuppgifterna bedöms enligt skalan 0, 3, 4, 5 poäng och 2-poängsuppgifterna bedöms enligt skalan 0, 1, 2 poäng. För godkänt krävs minst 10 poäng.

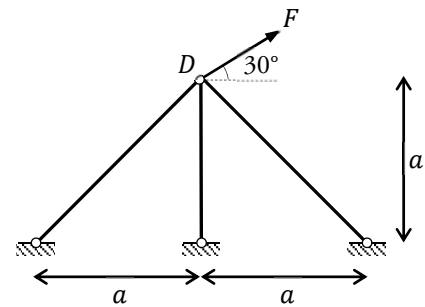
**Tillåtna hjälpmedel:** Formelsamling i hållfasthetslära, tabeller av typ TEFYMA samt miniräknare.

### 5-poängsfrågor

#### Uppgift 1

Stängsystemet i figuren är i punkt  $D$  belastat med en kraft  $F$ .

Alla stängerna har samma elasticitetsmodul  $E$  och tvärsnittsarea  $A$ . Beräkna förskjutningarna i punkt  $D$  i horisontell och vertikal riktning med hjälp av matrisformulerad förskjutningsmetod. Även stångkrafterna skall bestämmas i alla stängerna.



Förskjutningarna ges genom att lösa ekvationssystemet

$$K\mathbf{u} = \mathbf{P}$$

För att kunna lösa detta ekvationssystem måste den globala styvhetsmatrisen  $\mathbf{K}$  etableras och komponenterna i vektorerna  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{P}$  måste identifieras.

*Ledning:*

Kraftjämvikten mellan yttre krafter och stångkrafter kan skrivas som

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^T \mathbf{N}$$

där  $\mathbf{P}$  är den yttre lastvektorn,  $\mathbf{A}$  är transformationsmatrisen och  $\mathbf{N}$  stångkraftvektorn.

Kompatibiliteten mellan stångförlängningar och nodförskjutningar ges av

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

där  $\mathbf{n}$  är stångförlängningsvektorn och  $\mathbf{u}$  nodförskjutningsvektorn. Den konstitutiva lagen uttrycks genom Hookes lag som

$$\mathbf{N} = [\mathbf{K}]\mathbf{n}$$

#### Uppgift 2

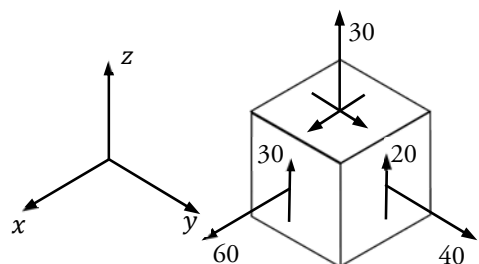
I en punkt i en kropp finns spänningar enligt figuren (angivna i MPa).

a) Beräkna analytiskt huvudspänningarna  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  och  $\sigma_3$ .

b) Sortera huvudspänningarna så att  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  och bestäm analytiskt huvudspänningsriktningen  $\mathbf{n}_1$  som hör till huvudspänningen  $\sigma_1$ . Kom ihåg att  $\mathbf{n}_1$  är en enhetsvektor.

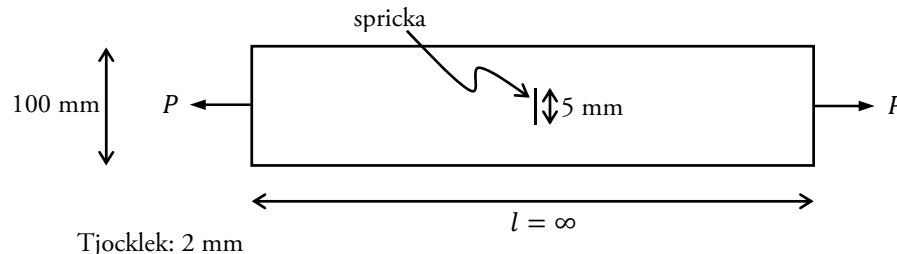
c) Svara på frågan: Vad karakteriserar en huvudspänningsriktning?

d) Om materialet i kroppen har flytspänningen  $\sigma_s = 100$  MPa, kommer spänningarna i punkten att orsaka plasticering enligt Von Mises flytkriterium?



**Uppgift 3**

En plåt är utformad enligt figur. Materialet är SIS 2309 och plåten är utsatt för en konstant temperatur på cirka 550°C. Plåtens tjocklek är 2 mm, bredden är 100 mm och längden  $l$  kan anses vara oändlig. På grund av rörelser i plåtens infästningar utsätts den i sina ändrar för en pulserande kraft  $P$  som varierar enligt  $P = \frac{1}{2}(P_0 \pm P_0)$  där  $P_0 = 40$  kN. I plåten finns från början en centralt placerad spricka med längden 5 mm.

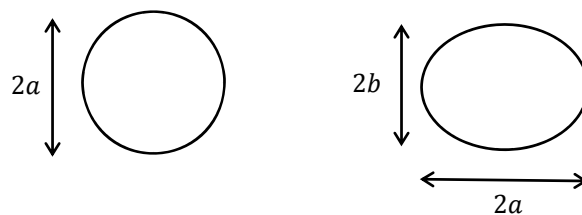


- Vilken spricklängd skulle orsaka omedelbart brott under den givna belastningen?
- Plåten utsätts för  $6 \times 10^4$  lastcykler innan det är dags för inspektion av den. Hur lång är sprickan efter detta antal cykler?
- Direkt efter inspektionen utsätts plåten för en konstant last på  $P = 60$  kN. Klarar plåten det utan att spricka (motivera ditt svar genom beräkning)?

*Ledning:* Villkoren för linjärelastisk brottmekanik kan anses vara uppfyllda och Paris lag kan användas. Notera att  $n \neq 2$ .

**2-poängsfrågor****Uppgift 4**

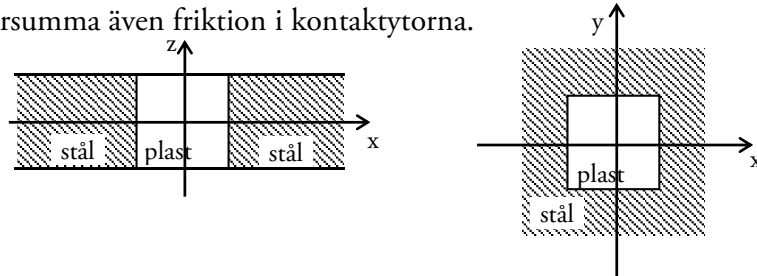
En axel som skall överföra ett vridande moment skall tillverkas med ett cirkulärt tvärsnitt med diametern  $2a$ , se den vänstra figuren. Under tillverkningen sker fel som gör att axeln får ett elliptiskt tvärsnitt där ellipsens axlar är  $2a$  respektive  $2b$ , se den högra figuren, där  $b = 0.95a$ .



- Hur många procent högre blir den maximala vridskjuvspänningen i axeln med det elliptiska tvärsnittet jämfört med i axeln med cirkulärt tvärsnitt?
- Var i det elliptiska tvärsnittet finns den maximala vridskjuvspänningen? Markera ditt svar i en tydlig figur. *Ledning:* Utnyttja Prandtls såphinneanalogi.

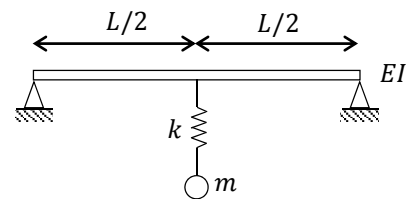
**Uppgift 5**

En plastplugg är placerad i ett hål i ett stålblock enligt figur. Inget glapp finns mellan pluggen och hålets väggar utan passningen är exakt vid en viss temperatur. Beräkna trycket som uppkommer i kontaktytorna om temperaturen ökas med  $\Delta T$ . Elasticitetsmodul, termisk expansionskoefficient och tvärkontraktionskoefficient är  $E_s, \alpha_s, \nu_s$  för stålet och  $E_p, \alpha_p, \nu_p$  för plasten. Det gäller att  $\alpha_s < \alpha_p$  och  $E_s \gg E_p$ , d.v.s. försumma elastiska – men inte termiska – töjningar i stålet jämfört med i plasten. Försumma även friktion i kontaktytorna.



**Uppgift 6**

En bungyhoppare, med massan  $m$ , fäster sitt gummiband mitt på en bro. Denna bro kan behandlas som en fritt upplagd balk med böjstyvheten  $EI$ . Gummibandet kan behandlas som en elastisk fjäder med styvheten  $k$ . Situationen är illustrerad i figuren till höger. Beräkna vinkelfrekvensen för hopparens – d.v.s. för massan  $m$ :s – svängning i vertikalled.

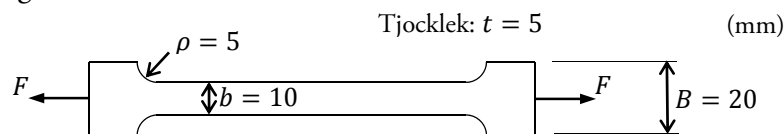


**Uppgift 7**

En maskinkomponent tillverkas med geometri enligt figur (mått i mm) och med tjockleken  $t = 5$  mm. Komponentens belastas med en varierande kraft

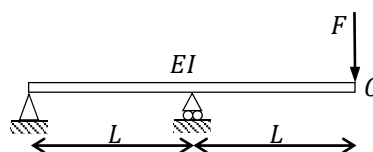
$$F = F_0(1 + \sin \omega t)$$

där  $\omega$  är lastens vinkelfrekvens och  $F_0 = 1400$  N är lastens amplitud. Komponentens är tillverkad (ej gjuten) av materialet 141550-01. För utmattningsberäkningar kan man anta att ytfaktorn  $K_r = 1$  och att volymfaktorn  $K_d = 1$ . Bestäm säkerheten mot utmattning i komponenten under den givna belastningen.

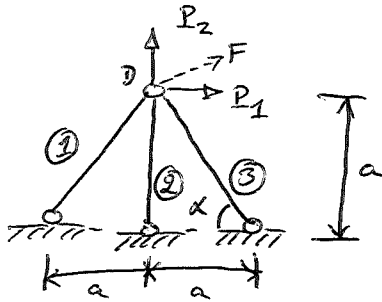


**Uppgift 8**

Bestäm med hjälp av Castiglianos andra sats nedböjningen i punkten C som belastas av kraften  $F$ . Försumma balkens egenvikt. Balkens böjstyvhet är  $EI$  och balkens längd är  $2L$ .



①

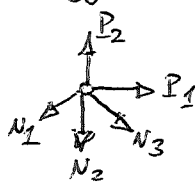


Vinkeln  $\alpha$ :  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \alpha$

Kraftvektor (yttre):  $\bar{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{bmatrix} = \frac{F}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$  (1)

Stängernas längder:  $L_1 = L_3 = \sqrt{2}a$ ,  $L_2 = a$  (2)

Frilägg nod D och ställ upp jämviktssamband:



(↑)  $P_2 - N_1 \frac{1}{\sqrt{2}} - N_2 - N_3 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

(→)  $P_1 - N_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + N_3 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}}_{\bar{P}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{\bar{A}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}}_{\bar{N}}$$
 (3)

Identifiera den globala styvhetsmatrisen:

$\bar{P} = \bar{A}^T \bar{N} = \bar{A}^T \bar{K}_j \bar{n} = \bar{A}^T \bar{K}_j \bar{A} \bar{u} = \bar{K} \bar{u}$  där  $\bar{K} = \bar{A}^T \bar{K}_j \bar{A}$  (4)

Stängstyvhetsmatrisen ges m.h.a. (2) som

$$\bar{K}_j = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$
 (5)

Bilda  $\bar{K}$  m.h.a. (3)-(5):  $\bar{K} = \bar{A}^T \bar{K}_j \bar{A} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  (6)

Kontrollera att  $\bar{K}$  är symmetrisk - OK!

Lös ut förskjutningarna ur  $\bar{K} \bar{u} = \bar{P} \Rightarrow \bar{u} = \bar{K}^{-1} \bar{P}$

d.v.s.  $\frac{aF}{2AE} \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ 2 - \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$  (7)

Stängkrafter:  $\bar{N} = \bar{K}_j \bar{A} \bar{u} = F \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(\sqrt{6} - [\sqrt{2} - 2]) \\ -\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 2) \\ -\frac{1}{4}(\sqrt{6} - [\sqrt{2} + 2]) \end{bmatrix}$  (8)

Svar: Se (7) och (8) ovan

2

a) Bilda spänningsmatrisen genom att identifiera spänningsskomponenterna

$$\bar{\bar{S}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 30 \\ 0 & 40 & 20 \\ 30 & 20 & 30 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Huvudspänningarna ges genom att lösa  $\det(\bar{\bar{S}} - \sigma \bar{\bar{I}}) = 0$   
vilket ger tredjegradsuttrycket

$$\sigma^3 - 130\sigma^2 + 4100\sigma - 12000 = 0$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 81,5 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 45,2 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = 3,25 \text{ MPa} \end{cases}$$

b) Den första huvudspänningsriktningen ges genom att lösa egen-  
värdesproblemet

$$(\bar{\bar{S}} - \sigma_1 \bar{\bar{I}}) \bar{n}_1 = 0 \quad \text{och} \quad \bar{n}_1^T \bar{n}_1 = 1 = n_{1x}^2 + n_{1y}^2 + n_{1z}^2$$

d.v.s.

$$\begin{bmatrix} 60 - \sigma_1 & 0 & 30 \\ 0 & 40 - \sigma_1 & 20 \\ 30 & 20 & 30 - \sigma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \\ n_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{n}_1 = \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \\ n_{1z} \end{bmatrix} \approx \pm \begin{bmatrix} 0,78 \\ 0,27 \\ 0,56 \end{bmatrix}$$
$$n_{1x}^2 + n_{1y}^2 + n_{1z}^2 = 1$$

c) I en huvudspänningsriktning existerar bara normalspänning, skjuv-  
spänningen är noll.

d) Effektivspänning enligt von Mises:

$$\begin{aligned} \sigma_{e, \text{Mises}} &= \left[ \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\sigma_{xx} + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2 \right]^{1/2} = \\ &= \left[ 60^2 + 40^2 + 30^2 - 60 \cdot 40 - 40 \cdot 30 - 30 \cdot 60 + 3 \cdot 20^2 + 3 \cdot 30^2 \right]^{1/2} = \underline{\underline{67,8 \text{ MPa}}} \end{aligned}$$

Flytkriterium:  $\sigma_{e, \text{Mises}} - \sigma_s = 0$  där  $\sigma_{e, \text{Mises}} < \sigma_s = 100 \text{ MPa}$ ,

d.v.s. ingen plasticering sker.

2

③ Materialdata:  $K_{Ic} = 48 \text{ MN/m}^{3/2}$ ,  $n = 2,8$ ,  $C = 9,77 \times 10^{-12}$

Belastning:  $\sigma_{\min} = 0$

$$\sigma_{\max} = \frac{P_0}{100 \cdot 2} = \frac{40 \times 10^3}{100 \cdot 2} \text{ MPa} = \underline{200 \text{ MPa}}$$

Initiell spricklängd:  $2a_0 = 5 \text{ mm} \Rightarrow a_0 = 2,5 \text{ mm}$

a) Kritisk spricklängd (se formelsamlingen sida 266)

$$K_{Ic} = \sigma_{\max} \sqrt{\pi \cdot a_{\text{krit}}} \cdot f_1 \quad \text{där } f_1 \approx 1 \text{ ty } \frac{a}{w} \approx 0,025$$

$$\Rightarrow a_{\text{krit}} = \frac{K_{Ic}^2}{\sigma_{\max}^2 \cdot \pi} = 0,018 \text{ m} = \underline{18 \text{ mm}}, \quad 2a_{\text{krit}} = \underline{36 \text{ mm}}$$

b) Spricktillväxt i den första lastcykeln:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{da}{dN}\right)_0 &= C (\Delta K_I)^n \\ \Delta K_I &= \Delta \sigma \sqrt{\pi a_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{da}{dN}\right)_0 = 9,77 \times 10^{-12} \left[ 200 \sqrt{\pi \cdot 2,5 \times 10^{-3}} \right]^{2,8} = 3,06 \times 10^{-8}$$

Paris lag:

$$N = \frac{a_0}{\left(\frac{da}{dN}\right)_0} \frac{1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^{\frac{n}{2}-1}}{\frac{n}{2}-1} = \frac{\frac{5}{2} \times 10^{-3}}{3,06 \times 10^{-8}} \frac{1 - \left(\frac{5}{2a}\right)^{0,4}}{0,4} = 6 \times 10^4$$

$$\Rightarrow \underline{a = 5,96 \text{ mm}}$$

Total spricklängd =  $2a = \underline{11,9 \text{ mm}}$

c)  $K_I = 300 \sqrt{\pi a} = 300 \sqrt{\pi \cdot 5,96 \times 10^{-3}} = \underline{41,1 \text{ MN/m}^{3/2}}$

d.v.s.  $K_I < K_{Ic} = 40 \text{ MN/m}^{3/2}$ , plåten håller!

Svar: a) Kritisk spricklängd är 36 mm.

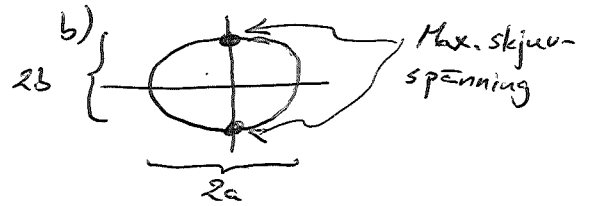
b) Sprickan är 11,9 mm lång.

c) Plåten håller!

4) a) Vridskjuvspänning:  $\tau_v = \frac{Mv}{w_v}$   
 Cirkulärt tvärsnitt:  $w_{v2} = \frac{\pi a^3}{2}$   
 Elliptiskt tvärsnitt:  $w_{v2} = \frac{\pi a b^2}{2}$   
 $\frac{\tau_{v2}}{\tau_{v1}} = \frac{w_{v1}}{w_{v2}} = \frac{\frac{\pi a^3}{2}}{\frac{\pi a b^2}{2}} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow [b=0,95a] \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{\tau_{v2}}{\tau_{v1}} = 1,11 \Rightarrow 11\% \text{ ökning}$

b) Där gradienten av Prandtl's spänningsfunktion är störst finns de högsta skjuvspänningarna.

Svar: a) Skjuvspänningen ökar med 11%



5) Hookes generaliserade lag ger töjningarna i plastpluggen:

$$(\epsilon_{xx})_p = \frac{1}{E_p} (\sigma_{xx} - \nu_p \sigma_{yy}) + \alpha_p \Delta T \quad (1)$$

$$(\epsilon_{yy})_p = \frac{1}{E_p} (\sigma_{yy} - \nu_p \sigma_{xx}) + \alpha_p \Delta T$$

Storleken på dessa töjningar bestäms av den termiska expansionen i stålet:

$$(\epsilon_{xx})_s = (\epsilon_{yy})_s = \alpha_s \Delta T \quad (2)$$

d.v.s.  $(\epsilon_{xx})_p = (\epsilon_{yy})_p = (\epsilon_{xx})_s = (\epsilon_{yy})_s$

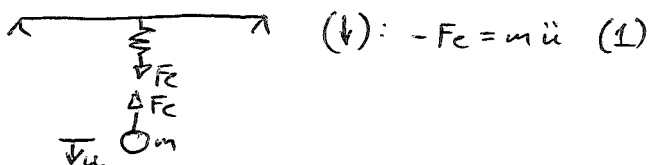
(1) & (2) ger: 
$$\begin{cases} \frac{1}{E_p} (\sigma_{xx} - \nu_p \sigma_{yy}) + \alpha_p \Delta T = \alpha_s \Delta T \\ \frac{1}{E_p} (\sigma_{yy} - \nu_p \sigma_{xx}) + \alpha_p \Delta T = \alpha_s \Delta T \end{cases} \Rightarrow \sigma_{xx} = \sigma_{yy}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{E_p} (1 - \nu_p) \sigma_{xx} = (\alpha_s - \alpha_p) \Delta T \Rightarrow \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{(\alpha_s - \alpha_p) E_p \Delta T}{1 - \nu_p}$$

Detta uttryck är negativt ty  $\alpha_p > \alpha_s$  vilket ger tryckspänningar, som förväntat.

Svar: Kontakttrycket blir  $\frac{(\alpha_s - \alpha_p) E_p \Delta T}{1 - \nu_p}$

6) Fritägg massan och ställ upp rörelseekvationen



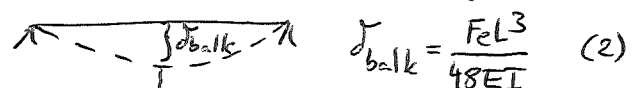
Total förskjutning:  $u = d_{\text{balk}} + d_{\text{fjäder}} \quad (4)$

(2)-(4):  $u = F_c \left( \frac{L^3}{48EI} + \frac{1}{k} \right) \Rightarrow F_c = k_{\text{total}} \cdot u$

där  $k_{\text{total}} = \frac{k \cdot 48EI}{kL^3 + 48EI} \quad (5)$

Svar:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k \cdot 48EI}{m(kL^3 + 48EI)}}$

Elementarfall ger balkens styvhet



Fjäder:  $F_c = k \cdot d_{\text{fjäder}} \Rightarrow d_{\text{fjäder}} = \frac{F_c}{k} \quad (3)$

(2) & (3):  $m\ddot{u} + k_{\text{total}} \cdot u = 0 \Rightarrow \ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$  där  $\omega_0^2 = \frac{k_{\text{total}}}{m}$

⑦ Materialdata:  $\sigma_u = \pm 180 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{up} = 160 \pm 160 \text{ MPa}$ ,  $R_m = \frac{490+590}{2} = 540 \text{ MPa}$

Last:  $\sigma = \sigma_0(1 + \sin \omega t) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_a = \sigma_0 \\ \sigma_m = \sigma_0 \end{cases} \Rightarrow \text{Arbetslinje: } \sigma_a = \sigma_m$

Reduktionsfaktorer:

Givet:  $\lambda = 1$ ,  $\frac{1}{K_r} = 1$ ,  $\frac{1}{K_d} = 1$

Tabell 32.1 på sid. 368 i formelsamlingen ger

$$\sigma_{nom} = \frac{F}{B \cdot b}$$

$$\left. \begin{array}{l} B/b = 2 \\ b/b = 0,5 \end{array} \right\} \Rightarrow K_t = 1,5$$

Figur 25.9 på sid. 298 i formelsamlingen ger

$$\left. \begin{array}{l} R_m = 540 \text{ MPa} \\ s = 2 \text{ mm} \end{array} \right\} \Rightarrow q = 0,85$$

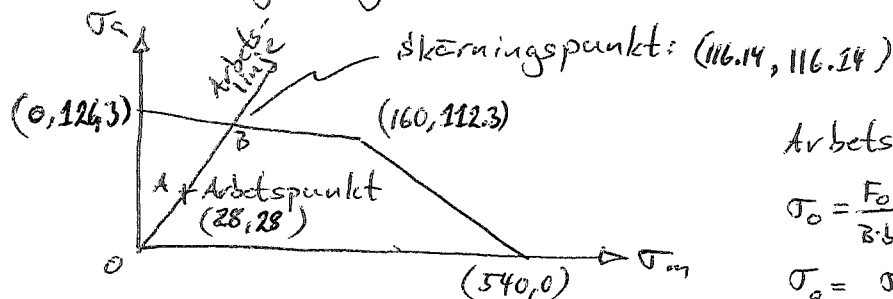
Anvisningsfaktor:  $K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0,85(1,5 - 1) = \underline{1,425}$

Reducera utmattningsdata:

$$\sigma_u^{red} = \frac{\sigma_u}{K_r K_d K_f} = \frac{\sigma_u^{tabell}}{1,425} = \underline{126,3 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_{up}^{red} = \frac{\sigma_{up}}{K_r K_d K_f} = \frac{\sigma_{up}^{tabell}}{1,425} = \underline{112,3 \text{ MPa}}$$

Reducerat Haighdiagram:



Arbetspunkt:

$$\sigma_0 = \frac{F_0}{B \cdot b} = \frac{1400}{20,5} = 28 \text{ MPa}$$

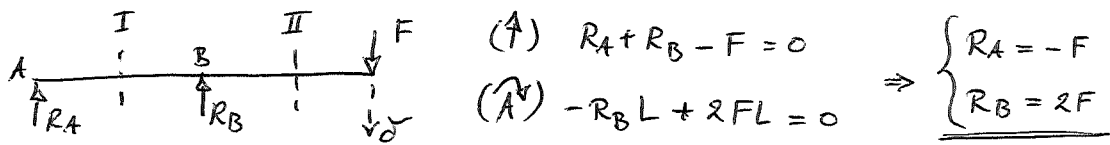
$$\sigma_a = \sigma_0 \text{ och } \sigma_m = \sigma_0$$

Säkerhetsfaktor:  $n = \frac{|O B|}{|O A|} = \frac{\sqrt{116,14^2 + 116,14^2}}{\sqrt{28^2 + 28^2}} = \underline{4}$

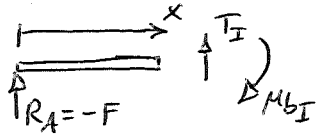
Svar: Säkerhetsfaktorn är cirka 4



⑧ Fritlägg och beräkna stödreaktionerna



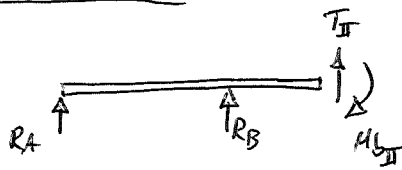
Snitt I,  $0 < x < L$



$(\uparrow): T_I + R_A = 0 \Rightarrow T_I = F$

$(\curvearrowright): M_{bI} + R_A x = 0 \Rightarrow M_{bI} = Fx$

Snitt II,  $L < x < 2L$



$(\uparrow): T_{II} + R_A + R_B = 0 \Rightarrow T_{II} = -F$

$(\curvearrowright): R_A x + R_B (x - L) + M_{bII} = 0$

$\Rightarrow M_{bII} = F(2L - x)$

Komplementär böjningsenergi

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \int_0^L \frac{M_{bI}^2}{2EI} dx + \int_L^{2L} \frac{M_{bII}^2}{2EI} dx = \int_0^L \frac{(Fx)^2}{2EI} dx + \int_L^{2L} \frac{F^2(2L-x)^2}{2EI} dx = \\ &= \frac{F^2 L^3}{3EI} \end{aligned}$$

Förskjutningen ges m.h.a. Castiglianos 2a sats:

$$\delta = \frac{\partial \bar{w}}{\partial F} = \frac{2FL^3}{3EI}$$

Svar: Nedböjningen blir  $\frac{2FL^3}{3EI}$