

Tentamen i Hållfasthetslära AK2 2017-06-02

Tentand är skyldig att visa upp fotolegitimation. Om sådan inte medförts till tentamen skall den visas upp på Avdelningen för Hållfasthetslära senast en vecka efter tentamensdatum. Uppgifterna bedöms i hela poäng, varje uppgift ger maximalt 5 poäng och hela tentamen ger maximalt 30 poäng. För godkänt krävs minst 15 poäng.

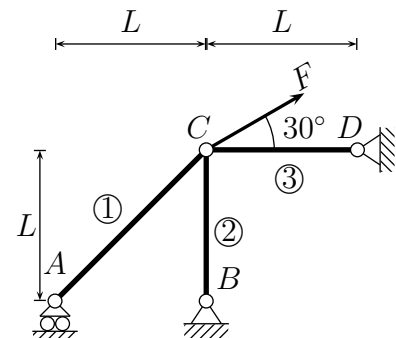
Alla lösningar skall vara väl motiverade och ett tydligt svar skall anges till varje uppgift.

Tillåtna hjälpmedel: Den formelsamling i hållfasthetslära som ingår i anvisad kurslitteratur, tabeller av typ TEFYMA samt miniräknare.

Uppgift 1

Stångsystemet i figuren är i punkt C belastat med en kraft F som är vinklad 30° från horisontalplanet. Alla stänger har samma elasticitetsmodul E och tvärsnittsarea A . Beräkna förskjutningarna i alla frihetsgrader med hjälp av kursens matrisformulerade förskjutningsmetod. Även stångkrafterna i alla stängerna och reaktionskrafterna i alla stöd skall bestämmas. Förskjutningarna ges genom att lösa ekvationssystemet

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}$$



För att kunna lösa detta ekvationssystem måste den globala styvhetsmatrisen \mathbf{K} etableras och komponenterna i vektorerna \mathbf{u} och \mathbf{P} måste identifieras.

Ledning: Kraftjämvikten mellan yttre krafter och stångkrafter kan skrivas som

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^T \mathbf{N}$$

där \mathbf{P} är den yttre lastvektorn, \mathbf{A} är transformationsmatrisen och \mathbf{N} stångkraftvektorn. Kraftjämvikten mellan reaktionskrafter och stångkrafter kan skrivas som

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}\mathbf{N}$$

där \mathbf{R} är reaktionskraftvektorn och \mathbf{H} en matris som måste bestämmas. Kompatibiliteten mellan stångförlängningar och nodförskjutningar ges av

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

där \mathbf{n} är stångförlängningsvektorn och \mathbf{u} nodförskjutningsvektorn. Den konstitutiva lagen uttrycks genom Hookes lag som

$$\mathbf{N} = [\mathbf{K}]\mathbf{n}$$

där $[\mathbf{K}]$ är stångstyvhetsmatrisen.

Uppgift 2

I en punkt i en kropp är spänningstillståndet givet av spänningsmatrisen

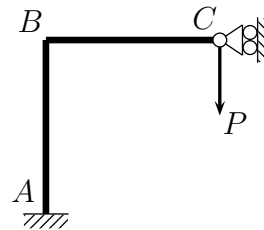
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 15 & 20 & 0 \\ 20 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Följande deluppgifter skall lösas:

- Beräkna genom handräkning, d.v.s. utan räknare, alla tre huvudspänningarna.
- Bestäm den huvudspänningsriktning som hör till den största huvudspänningen.
- Materialet har flytspänningen $\sigma_s = 200$ MPa. Bestäm säkerhetsfaktorn mot plasticitet i punkten enligt Trescas flythypotes.
- Bestäm den maximala skjuvspänningen i punkten.

Uppgift 3

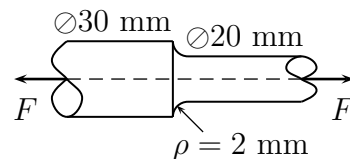
Ett ramverk består av två hopsvetsade balkar, AB respektive BC , som båda har längden L , tvärsnittsarean A och böjstyvheten EI . Ramverket belastas enligt figuren med en vertikal kraft P i punkten C . Bestäm den vertikala förskjutningen av punkten C med hjälp av Castiglianos sats.



Ledning: I balkar som är utsatta för både normalkraft och böjande moment kan normalkraftens bidrag till töjningsenergin försummas.

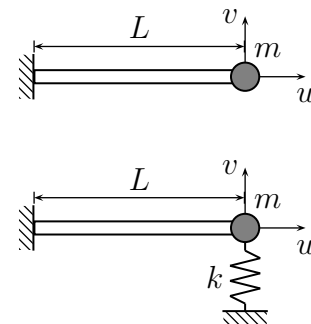
Uppgift 4

En stång med cirkulärt tvärsnitt har en diametervariation enligt figuren. Stången utsätts för en pulserande axiell kraft som varierar som $F = F_0 \pm F_0$. Materialet i axeln är normaliserat kolstål 141650-01 och axelns yta är slipad till ett profildjup $R_t = 5 \mu\text{m}$. Bestäm F_0 så att säkerheten mot utmattning är 4.



Uppgift 5

En punktmassa m sitter fäst vid den fria änden av en konsolbalk som har längden L , tvärsnittsarean A och böjstyvheten EI . Massans horisontella och vertikala förskjutning betecknas u respektive v . Balkens egenvikt och alla gravitationskrafter kan försummas.

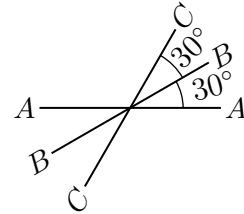


- Bestäm egenvinkelfrekvenserna för massans svängning i horisontalled respektive vertikalled i situationen som visas i den övre figuren.

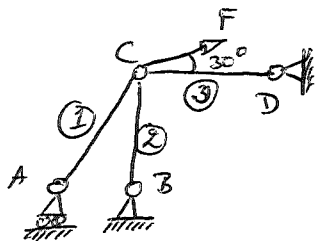
- b) En elastisk fjäder fästs vid massan, verkande i vertikal-
led, enligt den nedre figuren. Bestäm fjäderkonstanten
 k så att egenvinkelfrekvenserna för massans svängning
i horisontal- och vertikalled blir lika. Notera att fjädern
ändrar resultatet som bestämdes i a).

Uppgift 6

På en fri plan yta på en belastad komponent används en tråd-
töjningsgivare för att mäta töjningarna i de tre riktningarna AA ,
 BB och CC enligt figur. Töjningarna som registreras i respektive
riktning är $\varepsilon_{AA} = 0.012\%$, $\varepsilon_{BB} = 0.010\%$ och $\varepsilon_{CC} = 0.006\%$. Ma-
terialet i komponenten har elasticitetsmodulen $E = 100$ GPa och
tvärkontraktionskoefficienten (Poissons tal) $\nu = 0.25$. Beräkna
effektivspänningen i mätpunkten enligt Trescas flythypotes.



①



Stänglängder: $L_2 = L_3 = L$, $L_1 = \sqrt{2}L$

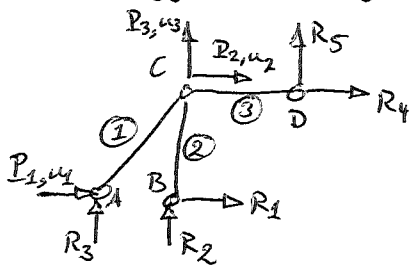
Antal frihetsgrader: $n_F = 3$

Antal element: $n_E = 3$

Statisk redundans: $\mu = n_E - n_F = 0$

d.v.s. systemet är statiskt bestämt

Fritlägg och inför generaliserade krafter och förskjutningar



$$\text{Nod A: } \begin{matrix} P_1 + N_1 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 & (1) \\ R_3 + N_1 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 & (2) \end{matrix}$$

$$\text{Nod B: } \begin{matrix} R_1 = 0 & (3) \\ R_2 + N_2 = 0 & (4) \end{matrix}$$

$$\text{Nod C: } \begin{matrix} P_2 - N_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + N_3 = 0 & (5) \\ P_3 - N_1 \frac{1}{\sqrt{2}} - N_2 = 0 & (6) \end{matrix}$$

$$\text{Nod D: } \begin{matrix} R_4 - N_3 = 0 & (7) \\ R_5 = 0 & (8) \end{matrix}$$

Jämviktsekvationer på matrisform:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}}_{\bar{P}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}}_{\bar{N}} \quad \text{där} \quad \bar{P} = \frac{F}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{dvs} \quad \bar{P} = \bar{A}^T \bar{N} \quad (9)$$

Reaktionsjämviktsekvationer på matrisform

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix}}_{\bar{R}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}}_{\bar{N}} \quad \text{dvs} \quad \bar{R} = \bar{H} \bar{N} \quad (10)$$

Stängstyvhetsmatris: $\Gamma_{\bar{R}} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$

①

Global styvhetsmatris

$$\left. \begin{aligned} \bar{n} &= \bar{A} \bar{u} \\ \bar{N} &= \bar{K}_J \bar{n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \bar{N} &= \bar{K}_J \bar{A} \bar{u} \\ \bar{P} &= \bar{A}^T \bar{N} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{P} = \underbrace{\bar{A}^T \bar{K}_J \bar{A}}_{\bar{K}} \bar{u} \Rightarrow \bar{K} \bar{u} = \bar{P} \quad (12)$$

där $\bar{K} = \bar{A}^T \bar{K}_J \bar{A}$

Sätt in (9) och (11) i (12)

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{K}^{-1} = \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} \sqrt{2}(2 + \sqrt{2}) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Genom att lösa (12) ges:

$$\bar{u} = \frac{FL}{2EA} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Från $\bar{N} = \bar{K}_J \bar{A} \bar{u}$ ges

$$\bar{N} = \frac{F}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Från (10) ges

$$\bar{R} = -\frac{F}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Svar:

- { Förskjutningarna ges i (13)
- { Stängkrafterna ges i (14)
- { Reaktionskrafterna ges i (15)

2) a) Huvudspänningarna ges genom att lösa $\det(\bar{\mathbf{S}} - \sigma \bar{\mathbf{I}}) = 0$ d.v.s.

$$\begin{vmatrix} 15-\sigma & 20 & 0 \\ 20 & -15-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 20-\sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (15-\sigma)(-15-\sigma)(20-\sigma) - (20-\sigma) \cdot 400 = 0$$

$$\Rightarrow (20-\sigma)(\sigma^2 - 625) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 25 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 20 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = -25 \text{ MPa} \end{cases}$$

b) $(\bar{\mathbf{S}} - \sigma_1 \bar{\mathbf{I}}) \bar{\mathbf{n}}_1 = \bar{\mathbf{0}}$
 Normering: $\bar{\mathbf{n}}_1^T \bar{\mathbf{n}}_1 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} (15-25)n_{1x} + 20n_{1y} = 0 \\ 20n_{1x} + (-15-25)n_{1y} = 0 \\ (20-25)n_{1z} = 0 \\ n_{1x}^2 + n_{1y}^2 + n_{1z}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -n_{1x} + 2n_{1y} = 0 \\ n_{1x} - 2n_{1y} = 0 \\ n_{1z} = 0 \\ n_{1x}^2 + n_{1y}^2 + n_{1z}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4n_{1y}^2 + n_{1y}^2 = 1 \\ n_{1x} = 2n_{1y} \\ n_{1z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_{1y} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \\ n_{1x} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \\ n_{1z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\bar{\mathbf{n}}_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

c) $\sigma_{e, Tresca} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|) =$
 $= \max(5, 50, 45) = \underline{\underline{50 \text{ MPa}}}$

Säkerhetsfaktor: $n = \frac{\sigma_s}{\sigma_{e, Tresca}} = \frac{200}{50} = \underline{\underline{4}}$

d) Maximal skjuvspänning: $\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_{e, Tresca} = \frac{50}{2} \text{ MPa} = \underline{\underline{25 \text{ MPa}}}$
 vilket även kan tolkas i termer av Mohrs spänningssirkel vars diameter är $2 \cdot \tau_{\max} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|)$.

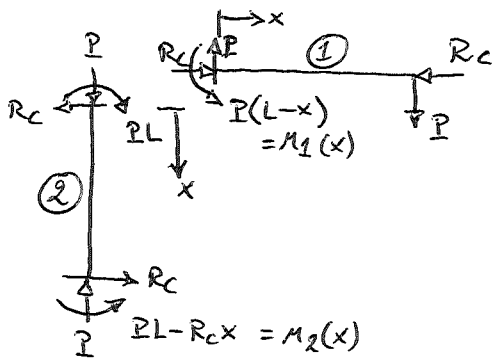
Svar: a) $\sigma_1 = 25 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 20 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -25 \text{ MPa}$

b) $\bar{\mathbf{n}}_1^T = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} [2 \ 1 \ 0]$

c) Säkerhetsfaktorn är 4

d) Maximal skjuvspänning är 25 MPa

③ Snitta balkdelarna och identifiera hur det böjande momentet varierar



Komplementär böjningsenergi för hela ramverket (kraften R_c hanteras som förmodat känd):

$$\begin{aligned}
 w &= \int_0^L \frac{M_1^2(x)}{2EI} dx + \int_0^L \frac{M_2^2(x)}{2EI} dx = \\
 &= \int_0^L \frac{[P(L-x)]^2}{2EI} dx + \int_0^L \frac{[PL - R_c x]^2}{2EI} dx = \\
 &= \frac{1}{2EI} \left[\frac{P^2 L^3}{3} + P^2 L^3 - PR_c L^3 + \frac{1}{3} R_c^2 L^3 \right] \quad (1)
 \end{aligned}$$

(1) ger att $w = w(P, R_c)$ och

$$\frac{\partial w}{\partial R_c} = \frac{1}{2EI} \left(-PL^3 + \frac{2}{3} R_c L^3 \right) = 0 \Rightarrow \underline{R_c = \frac{3}{2} P} \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial P} = \left(\frac{2PL^3}{3} + 2PL^3 - R_c L^3 \right) \frac{1}{2EI} \Rightarrow [\text{Sätt in (2)}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial P} = \frac{7PL^3}{12EI}$$

Svar: Den vertikala förskjutningen i punkten C är $\frac{7PL^3}{12EI}$

④ Materialdata: $R_m = \sigma_B \approx \frac{570+690}{2} = 640 \text{ MPa}$, $\sigma_u = \pm 200 \text{ MPa}$, $\sigma_{up} = 180 \pm 180 \text{ MPa}$

Reduktion av utmattningsdata:

Ej gjutgods: $\lambda = 1$

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{d} = \frac{30}{20} = 1,5 \\ \frac{s}{d} = \frac{2}{20} = 0,1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow K_t = 1,89 \quad \left. \begin{aligned} \eta = 0,75 \\ \Rightarrow K_f = 1 + \eta(K_t - 1) = 1,67 \end{aligned} \right\}$$

Ingen böjning eller vridning:

$$K_d = 1$$

$$\left. \begin{aligned} R_a = \frac{R_t}{4} = \frac{5}{4} = 1,25 \mu\text{m} \\ \sigma_B = 640 \text{ MPa} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{K_r} = 0,95$$

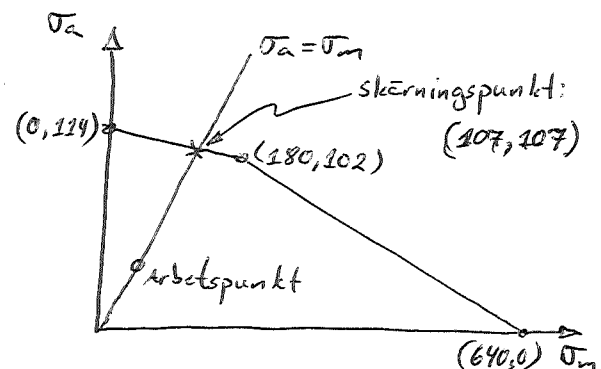
$$\frac{\lambda}{K_r K_f K_d} = \frac{1}{1,67} \cdot 0,95 \approx 0,57$$

$$\sigma_{u, \text{red}} = \pm 200 \cdot 0,57 \text{ MPa} = \pm 113,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{up, \text{red}} = 180 \pm 180 \cdot 0,57 \text{ MPa} = 180 \pm 102,4 \text{ MPa}$$

Arbetslinje: $F = F_0 \pm F_0 \Rightarrow \sigma = \sigma_0 \pm \sigma_0$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\text{max}} = 2\sigma_0 \\ \sigma_{\text{min}} = 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \sigma_m = \sigma_0 \\ \sigma_a = \sigma_0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \sigma_a = \sigma_m$$



Nominell spänning: $\sigma_{\text{nom}} = \frac{4F_0}{\pi d^2}$ ($\sigma_{a, \text{nom}} = \sigma_{m, \text{nom}}$)

Säkerhetsfaktor: $n = 4$

$$\left. \begin{aligned} n \cdot \sigma_{\text{nom}} = 107 \text{ MPa} \Rightarrow \\ \Rightarrow F_0 = \frac{107 \times 10^6}{4} \pi \frac{(20 \times 10^{-3})^2}{4} = \underline{8,4 \text{ kN}} \end{aligned} \right\}$$

Svar: $F_0 \approx 8,4 \text{ kN}$

⑤ Rörelsekvation för massan måste ställas upp i två riktningar

a)

$(\rightarrow) - F_a = m\ddot{u}$ (1)
 $(\uparrow) - F_t = m\ddot{v}$ (2)

Konstitutiva samband: $u = \frac{F_a L}{EA}$ (axiellt belastad stång/balk)

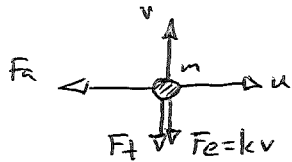
$$\Rightarrow F_a = \frac{EA}{L} u$$
 (3)

$$v = \frac{F_t L^3}{3EI} \text{ (elementarfall)} \Rightarrow F_t = \frac{3EI}{L^3} v$$
 (4)

(1)&(3): $m\ddot{u} + \frac{EA}{L} u = 0 \Rightarrow \ddot{u} + \omega_{0,u}^2 u = 0$ där $\omega_{0,u}^2 = \frac{EA}{mL}$ (5)

(2)&(4): $m\ddot{v} + \frac{3EI}{L^3} v = 0 \Rightarrow \ddot{v} + \omega_{0,v}^2 v = 0$ där $\omega_{0,v}^2 = \frac{3EI}{mL^3}$ (6)

b) Fritägg massan på nytt:



Endast den vertikala rörelsekvationen påverkas av fjäderna:

$$(\uparrow) -F_t - F_e = m\ddot{v} \Rightarrow m\ddot{v} + \left(\frac{3EI}{L^3} + k\right)v = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{v} + \omega_{0,v}^2 v = 0 \text{ där } \omega_{0,v}^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{3EI}{L^3} + k\right) \quad (7)$$

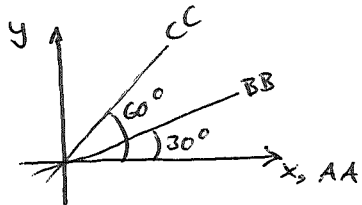
Jämför $\omega_{0,u}$ från (5) med $\omega_{0,v}$ från (7):

$$\omega_{0,u} = \omega_{0,v} \Rightarrow \frac{EA}{mL} = \frac{1}{m} \left(\frac{3EI}{L^3} + k\right) \Rightarrow \frac{EA}{L} - \frac{3EI}{L^3} = k \Rightarrow k = \frac{E}{L} \left(A - \frac{3I}{L^2}\right)$$

Svar: a) Horisontell egenvinkelfrekvens = $\left(\frac{EA}{mL}\right)^{1/2}$
 Vertikal egenvinkelfrekvens = $\left(\frac{3EI}{mL^3}\right)^{1/2}$

b) Fjäderstyvhet: $k = \frac{E}{L} \left(A - \frac{3I}{L^2}\right)$

⑥ Inför ett cartesiskt koordinatsystem med x-axeln längs riktningen AA:



"Plan fri ytta" $\Leftrightarrow \sigma_z = 0$ (1)

Töjningar:

$$\begin{aligned} \epsilon(30^\circ) &= 1 \times 10^{-4} = \epsilon_x \cos^2 30^\circ + \epsilon_y \sin^2 30^\circ + \delta_{xy} \cos 30^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{3}{4} \epsilon_x + \frac{1}{4} \epsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4} \delta_{xy} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\epsilon(60^\circ) = 6 \times 10^{-5} = \frac{1}{4} \epsilon_x + \frac{3}{4} \epsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4} \delta_{xy} \quad (3)$$

$$\epsilon_x = \epsilon(0^\circ) = 1,2 \times 10^{-4} \quad (4)$$

$$(1)-(4): \begin{cases} \epsilon_x = 1,2 \times 10^{-4} \\ \epsilon_y = 4 \times 10^{-5} \\ \delta_{xy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \epsilon_x \text{ och } \epsilon_y \text{ är huvudtöjningar} \\ \sigma_x, \sigma_y \text{ och } \sigma_z = 0 \text{ är huvudspänningar} \end{array}$$

Hookes generaliserade lag för plant spänningstillstånd (eftersom $\sigma_z = 0$)

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \approx 13,9 \text{ MPa} \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \approx 7,5 \text{ MPa} \\ \sigma_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 13,9 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 7,5 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

Effektivspänning: $\sigma_{e, Tresca} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|)$
 $= \max(13,9 - 7,5, |7,5|, |13,9|) = \underline{\underline{13,9 \text{ MPa}}}$

Svar: Effektivspänningen i punkten är 13,9 MPa enligt Trescas hypotes.