

Tentamen i Hållfasthetslära AK2 2017-08-21

Tentand är skyldig att visa upp fotolegitimation. Om sådan inte medförts till tentamen skall den visas upp på Avdelningen för Hållfasthetslära senast en vecka efter tentamensdatum. Uppgifterna bedöms i hela poäng, varje uppgift ger maximalt 5 poäng och hela tentamen ger maximalt 30 poäng. För godkänt krävs minst 15 poäng.

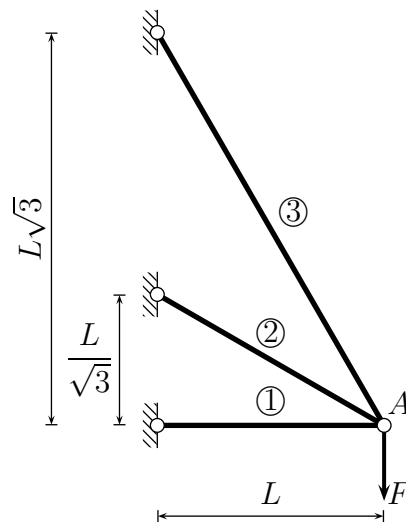
Alla lösningar skall vara väl motiverade och ett tydligt svar skall anges till varje uppgift.

Tillåtna hjälpmedel: Den formelsamling i hållfasthetslära som ingår i anvisad kurslitteratur, tabeller av typ TEFYMA samt miniräknare.

Uppgift 1

Stångsystemet i figuren är i punkt A belastat med en vertikalt nedåtriktad kraft F . Alla stängerna har samma elasticitetsmodul E , tvärsnittsarea A och termisk längdutvidgningskoefficient α . Stång 1 värms ΔT_1 grader medan stängerna 2 och 3 inte värms upp, d.v.s. $\Delta T_2 = \Delta T_3 = 0$. Uppgiften är att ta fram sambandet mellan yttre krafter \mathbf{P} , nodförskjutningar \mathbf{u} och temperaturändringen Δ . Därefter skall förskjutningarna i horisontell och vertikal led i punkten A bestämmas i två fall:

- Om hänsyn enbart tas till den yttre kraften F .
- Om hänsyn tas både till den yttre kraften F och till temperaturändringen ΔT_1 .



Beräkna förskjutningarna med hjälp av kursens matrisformulerade förskjutningsmetod.

Ledning: Kraftjämvikten mellan yttre krafter och stångkrafter kan skrivas som

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^T \mathbf{N}$$

där \mathbf{P} är den yttre lastvektorn, \mathbf{A} är transformationsmatrisen och \mathbf{N} stångkraftvektorn. Kompatibiliteten mellan stångförlängningar och nodförskjutningar ges av

$$\mathbf{n} = \mathbf{A} \mathbf{u}$$

där \mathbf{n} är stångförlängningsvektorn och \mathbf{u} nodförskjutningsvektorn. Om *inga temperaturändringar beaktas* ges det konstitutiva sambandet genom Hookes lag som

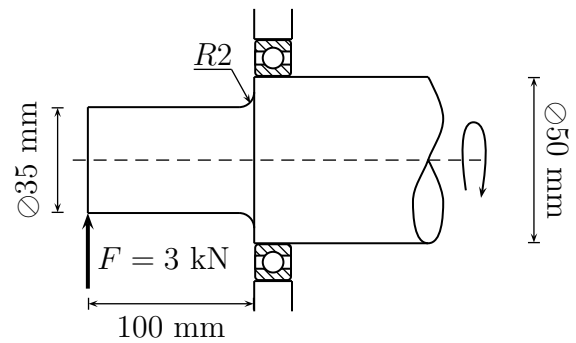
$$\mathbf{N} = [\mathbf{K}] \mathbf{n}$$

där $[\mathbf{K}]$ är stångstyvhetsmatrisen. Hookes lag för enaxlig spänning ges av $\sigma = E\varepsilon$ om ingen hänsyn tas till temperaturändringar. Om temperaturändringar beaktas gäller i stället $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^T)$ där $\varepsilon^T = \alpha\Delta T$. Det är lämpligt att införa kolumnmatrisen Δ som

$$\Delta = \alpha \begin{bmatrix} \Delta T_1 L_1 \\ \Delta T_2 L_2 \\ \Delta T_3 L_3 \end{bmatrix}$$

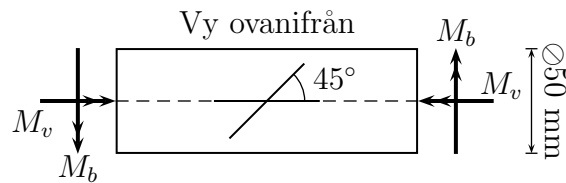
Uppgift 2

En axeltapp i hjulet på ett fordon har mått enligt figuren. Den är tillverkad av normaliserat kolstål 141650-01 och ytan är slipad till ett profildjup $R_t = 5 \mu\text{m}$. På grund av axeltappens rotation kommer den att utsättas för växlande spänningar även om den belastande kraften $F = 3 \text{ kN}$ kan anses som konstant under hela axeltappens livslängd. Bestäm säkerhetsfaktorn mot brott på grund av utmattning.



Uppgift 3

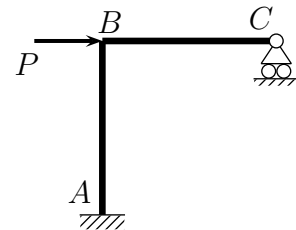
En röraxel med ytterdiametern 50 mm och vägg tjockleken 10 mm är utsatt för både ett böjande moment M_b och ett vridande moment M_v . För att bestämma storleken på dessa moment limmar man en trådtöjningsgivare på rörets utsida. Givaren registrerar töjningen $\varepsilon_z = 365 \times 10^{-6}$ i rörets längdriktning och $\varepsilon_{45} = -465 \times 10^{-6}$ i en riktning 45° från rörets längdriktning, se figur. Röret är gjort av ett stålmaterial med elasticitetsmodul $E = 210 \text{ GPa}$ och Poissons tal $\nu = 0.3$. Följande deluppgifter skall lösas:



- Bestäm storleken på momenten M_b och M_v .
- Det böjande momentet M_b hålls konstant. Om materialet har sträckgränsen $\sigma_s = 410 \text{ MPa}$, vid hur stort vridande momentet M_{vs} initieras plasticitet i röraxeln enligt von Mises flythypotes?

Uppgift 4

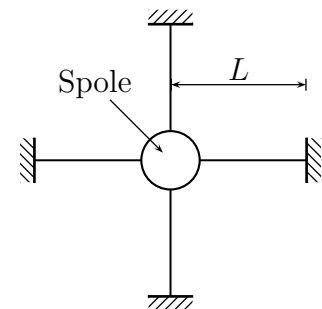
Ett ramverk består av två hopsvetsade balkar, AB respektive BC , som båda har längden L , tvärsnittsarean A och böjstyvheten EI . Ramverket belastas enligt figuren med en horisontell kraft P i punkten B . Bestäm den horisontella förskjutningen av punkten B och lutningen på balken i punkten C med hjälp av Castiglianos sats.



Ledning: I balkar som är utsatta för både normalkraft och böjande moment kan normalkraftens bidrag till töjningsenergin försummas.

Uppgift 5

En cylindrisk vridspole i ett elektriskt relä konstrueras så att den fjädrar tillbaka efter att ha vridits från sitt normalläge. Det återförande momentet åstadkoms genom att spolen är fäst i fyra stycken identiska och mycket tunna bladfjädrar, som i sin andra ände är fast förankrade. Bladfjädrarna har alla längden L och utgår radiellt från spolen. Bladfjädrarna har ett rektangulärt tvärsnitt med bredden b och höjden h och de är



tillverkade av ett material som karakteriseras av elasticitetsmodulen E . Spolens axel är vinkelrät mot papprets plan och spolen har masströghetsmomentet J . Bestäm spolens egenvinkelfrekvens ω .

Uppgift 6

I en punkt i en kropp är spänningstillståndet givet av spänningsmatrisen

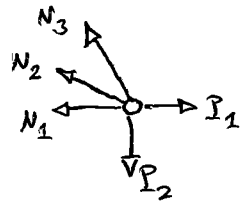
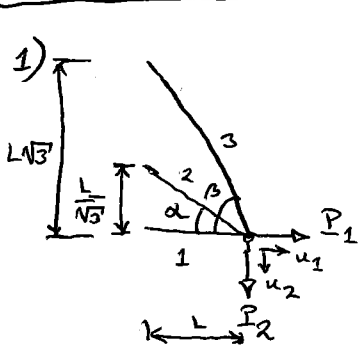
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

En yta genom den aktuella punkten har normalriktningen

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Följande deluppgifter skall lösas:

- Beräkna genom handräkning, d.v.s. utan räknare, alla tre huvudspänningarna.
- Bestäm den huvudspänningsriktning som hör till den största huvudspänningen.
- Beräkna spänningsvektorn \mathbf{s} som verkar på ytan som har normalriktningen \mathbf{n} .
- Är den givna riktningen \mathbf{n} en huvudspänningsriktning? Motivera ditt svar.



Jämvikt:

$$\left. \begin{aligned} (\rightarrow) P_1 - N_1 - N_2 \cos \alpha - N_3 \cos \beta &= 0 \\ (\uparrow) -P_2 + N_2 \sin \alpha + N_3 \sin \beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Stänglängder:

$$L_1 = L, \quad L_2 = \sqrt{L^2 + \frac{L^2}{3}} = \frac{2L}{\sqrt{3}}, \quad L_3 = \sqrt{L^2 + L^2 \cdot 3} = 2L \quad (2)$$

$$\text{Vinklar: } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{L}{L_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos \beta = \frac{L}{L_3} = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{L}{\sqrt{3}L_2} = \frac{1}{2}, & \sin \beta = \frac{L\sqrt{3}}{L_3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (3)$$

(2) och (3) ger:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}}_{\bar{P}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}}_{\bar{A}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}}_{\bar{N}} \quad (4)$$

Kinematik: $\bar{n} = \bar{A} \bar{u}$ där $\bar{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ och $\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ (5)

Materialsamband:

För en stång gäller $\sigma_i = E(\epsilon_i - \epsilon_i^T)$ där $\sigma_i = \frac{N_i}{A}$, $\epsilon_i = \frac{n_i}{L_i}$, $\epsilon_i^T = \alpha \Delta T_i$;
d.v.s. $\frac{N_i}{A} = E\left(\frac{n_i}{L_i} - \alpha \Delta T_i\right) \Rightarrow N_i = \frac{AE}{L_i}(n_i - \alpha \Delta T_i L_i)$

För alla tre stängerna ges:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}}_{\bar{N}} = AE \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \end{bmatrix}}_{\bar{K}_J} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}}_{\bar{n}} - \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta T_1 L_1 \\ \Delta T_2 L_2 \\ \Delta T_3 L_3 \end{bmatrix}}_{\bar{\Delta}} \right) \Rightarrow \bar{N} = \bar{K}_J (\bar{n} - \bar{\Delta}) \quad (6)$$

(6) och (4) ger: $\bar{P} = \bar{A}^T \bar{K}_J (\bar{n} - \bar{\Delta})$ som med (5) ger

$$\bar{P} = \underbrace{\bar{A}^T \bar{K}_J \bar{A}}_{\bar{K}} \bar{u} - \bar{A}^T \bar{K}_J \bar{\Delta} \Rightarrow \bar{K} \bar{u} = \bar{P} + \bar{A}^T \bar{K}_J \bar{\Delta}$$

Styvhetsmatris: $\bar{K} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \frac{3+\sqrt{3}}{8L} EA \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) $P_2 = F$ och $P_1 = 0$ liksom $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T_3 = 0$ vilket ger

$$\frac{3+\sqrt{3}}{8L} EA \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{4FL}{(3+\sqrt{3})EA} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

svar till deluppgift a

Notera att \bar{K} är symmetrisk, d.v.s. $\bar{K} = \bar{K}^T$

b) $P_2 = F$ och $P_1 = 0$, $\Delta T_1 = \Delta T$ och $\Delta T_2 = \Delta T_3 = 0$ vilket ger

$$\frac{3+\sqrt{3}}{8L} EA \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \alpha \Delta T L \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{4FL}{(3+\sqrt{3})EA} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{4\alpha \Delta T L}{3+\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

svar till deluppgift b

Svar: Se ovan!

2) Material 141650-01 $\rightarrow \begin{cases} \sigma_u = \pm 270 \text{ MPa} \\ \sigma_B = 640 \text{ MPa} \end{cases}$

Böjande moment: $M_b = FL = 300 \text{ Nm}$

Reduktion av utmattningsdata:

$R_a = \frac{R_t}{4} = \frac{5}{4} = 1,25 \mu\text{m} \Rightarrow \frac{1}{K_r} \approx 0,97$

$\left. \begin{matrix} S = 2 \text{ m} \\ \sigma_B = 640 \text{ MPa} \end{matrix} \right\} \Rightarrow q \approx 0,78$

$K_d = 1$

$\left. \begin{matrix} D/d = 1,43 \\ S/d = 0,057 \end{matrix} \right\} \Rightarrow K_t \approx 1,95$

$K_f = 1 + q(K_t - 1) \approx 1,74$

$\lambda = 1$

Spänningar: $\sigma_{nom} = \frac{32M_b}{\pi d^3} \approx 71,3 \text{ MPa}$

$\sigma_{u,red} = \pm 270 \frac{\lambda}{K_f K_r K_d} \approx \pm 150,5 \text{ MPa}$

Mittspänningen $\sigma_m = 0$, d.v.s. kontroll behöver endast ske i "amplitudled".

Säkerhetsfaktor: $n = \frac{\sigma_{u,red}}{\sigma_{nom}} = \underline{\underline{2,11}}$

Svar: Säkerhetsfaktorn är 2,1

3) Töjningar: $\begin{cases} \epsilon_0 = \epsilon_x = 365 \times 10^{-6} \\ \epsilon_{45} = -465 \times 10^{-6} \\ \epsilon_{90} = \epsilon_y = 0 \end{cases}$ där endast böjande och vridande moment verkar på röret.

$\epsilon(\varphi) = \epsilon_x \cos^2 \varphi + \epsilon_y \sin^2 \varphi + \gamma_{xy} \cos \varphi \sin \varphi \Rightarrow \epsilon_{45} = \epsilon_x \frac{1}{2} + \gamma_{xy} \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{45} - \epsilon_x = 2 \cdot (-465 \times 10^{-6}) - 365 \times 10^{-6} = \underline{\underline{-1295 \times 10^{-6}}}$

Böjmotstånd: $W_b = \frac{\pi}{32D} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32 \cdot 50 \times 10^{-3}} [(50 \times 10^{-3})^4 - (30 \times 10^{-3})^4] = 10,68 \times 10^{-6} \text{ m}^3$

Vridmotstånd: $W_v = \frac{\pi}{16D} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{16 \cdot 50 \times 10^{-3}} [(50 \times 10^{-3})^4 - (30 \times 10^{-3})^4] = 2,136 \times 10^{-5} \text{ m}^3$

Notera att röret inte kan anses som tunnväggigt!

a) $|M_v| = W_v |\gamma_{xy}| = W_v \cdot G \cdot |\gamma_{xy}| = 2,136 \times 10^{-5} \cdot 80,8 \times 10^9 \cdot |1295 \times 10^{-6}| = \underline{\underline{2235 \text{ Nm}}}$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 80,8 \text{ GPa}$

$|M_b| = W_b |\sigma_x| = W_b \cdot E \cdot |\epsilon_x| = 10,68 \times 10^{-6} \cdot 210 \times 10^9 \cdot |365 \times 10^{-6}| = \underline{\underline{819 \text{ Nm}}}$

b) $\sigma_{e,Mises} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ där $\tau = \frac{M_v}{W_v}$ och $\sigma = E\epsilon_x$, d.v.s. med $\sigma_{e,Mises} = \sigma_s = 410 \text{ MPa}$

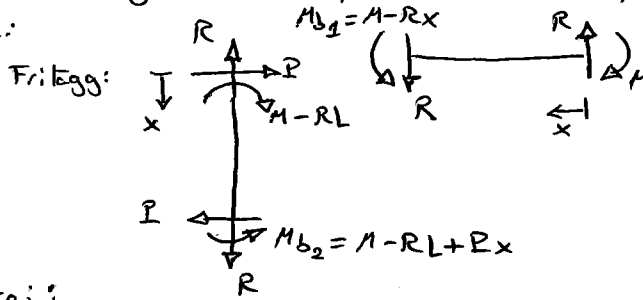
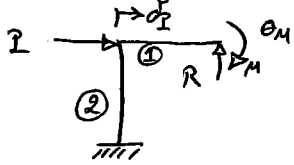
$\left(\frac{\sigma_s^2 - \sigma^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{M_{v,s}}{W_v} \Rightarrow M_{v,s} = W_v \sqrt{\frac{\sigma_s^2 - \sigma^2}{3}} = 2,136 \times 10^{-5} \sqrt{\frac{(410 \times 10^6)^2 - (210 \times 10^9 \cdot 365 \times 10^{-6})^2}{3}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{M_{v,s} = 4967 \text{ Nm}}}$

Svar: a) $M_b = 819 \text{ Nm}$ och $M_v = 2235 \text{ Nm}$

b) Plasticering initieras vid det vridande momentet $M_{v,s} = 4967 \text{ Nm}$

4) Gör problemet statiskt bestämt genom att införa reaktionskraften R som bekant.
 Inför även momentet M :



Komplementär töjningsenergi:

$$\bar{W}(M, R, P) = \int_0^L \frac{M_{b1}^2}{2EI} dx + \int_0^L \frac{M_{b2}^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\int_0^L (M - Rx)^2 dx + \int_0^L (M - RL + Px)^2 dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2EI} \left[2M^2L - 3MRL^2 + \frac{4}{3}R^2L^3 + MLP^2 + \frac{1}{3}P^2L^3 - PRL^3 \right]$$

Bestäm reaktionskraften R :

$$\left. \frac{\partial \bar{W}}{\partial R} \right|_{M=0} \Rightarrow R = \frac{3}{8}P$$

Förskjutning konjugerad till kraften P :

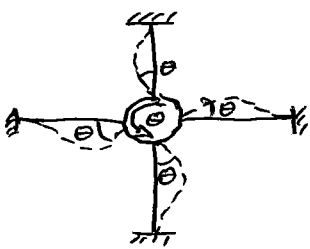
$$\left. \delta_P = \frac{\partial \bar{W}}{\partial P} \right|_{M=0, R=\frac{3}{8}P} \Rightarrow \delta_P = \frac{7PL^3}{48EI}$$

Rotation i punkten C:

$$\left. \theta_M = \frac{\partial \bar{W}}{\partial M} \right|_{M=0, R=\frac{3}{8}P} \Rightarrow \theta_M = -\frac{PL^2}{16EI}$$

Svar: Horisontell förskjutning i punkten B är $\frac{7PL^3}{48EI}$ (åt höger) och balkens lutning i punkten C är $-\frac{PL^2}{16EI}$

5) Deformations-skiss

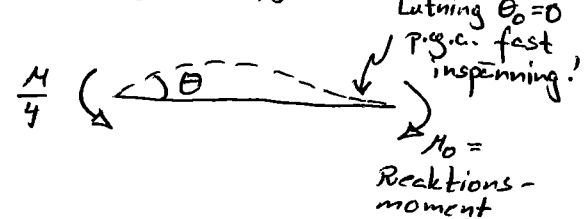


Frilagd spole:



M = Återförande moment

En frilagd bladfjäder:



En bladfjäder beskrivs av elementarfall 5. Bestäm reaktionsmomentet M_0 genom att utnyttja $\theta_0 = 0$:

$$\theta_0 = \frac{M/4 \cdot L}{6EI} + \frac{M_0 L}{3EI} = 0 \Rightarrow M_0 = -\frac{M}{3}$$

Bestäm vinkeln θ : $\theta = \frac{M/4 \cdot L}{3EI} - \frac{M/8 \cdot L}{6EI} = \frac{ML}{EI} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{48} \right) = \frac{3ML}{48EI}$

Med $I = \frac{bh^3}{12}$ ges nu $\theta = \frac{3ML}{4Ebh^3} \Rightarrow M = \frac{4Ebh^3}{3L} \theta$ (1)

Rörelseekvation för spolen:

$$-M = J\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{M}{J} = 0 \quad (2)$$

(1) & (2): $\ddot{\theta} + \frac{4Ebh^3}{3LJ} \theta = 0$

Fjäderstyvhets

Svar: Egenvinkelfrekvensen är $\omega = \sqrt{\frac{4Ebh^3}{3LJ}}$

6) Givet spänningstillstånd: $\bar{\bar{S}} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ MPa

a) Huvudspänningarna ges som egenvärdena till $\bar{\bar{S}}$:

$$\det(\bar{\bar{S}} - \sigma \bar{\bar{I}}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\sigma & 10 & 0 \\ 10 & 5-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -6-\sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(5-\sigma)^2(6+\sigma) + 100(6+\sigma) = 0$$

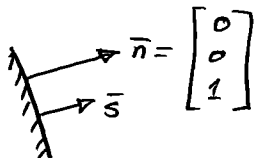
$\Rightarrow [100 - (5-\sigma)^2](6+\sigma) = 0$ där $\sigma = -6$ MPa är en lösning och 2:gradsekvationen $100 - (5-\sigma)^2 = 0$ ger $\sigma = 5 \pm 10$ MPa, d.v.s.

$\sigma_1 = 15$ MPa, $\sigma_2 = -5$ MPa och $\sigma_3 = -6$ MPa

b) $(\bar{\bar{S}} - \sigma_1 \bar{\bar{I}})\bar{n}_1 = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5-15 & 10 & 0 \\ 10 & 5-15 & 0 \\ 0 & 0 & -6-15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \\ n_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{n}_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Normering: $\bar{n}_1^T \bar{n}_1 = 1 \Rightarrow n_{1x}^2 + n_{1y}^2 + n_{1z}^2 = 1$

c) Spänningsvektorn $\bar{s} = \bar{\bar{S}}\bar{n} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$ MPa

d)  Skjuvspänningen är noll på den aktuella ytan eftersom normalriktningen \bar{n} och spänningsvektorn \bar{s} är parallella (endast vektorernas storlek skiljer, inte riktningen). Eftersom bara normalspänning finns är \bar{n} en huvudspänningsriktning.

Svar: a) $\sigma_1 = 15$ MPa, $\sigma_2 = -5$ MPa, $\sigma_3 = -6$ MPa

b) $\bar{n}_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) Se motivering ovan. Ja, \bar{n} är en huvudspänningsriktning!