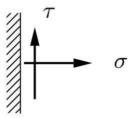
Kompletterande formelsamling i Teknisk mekanik

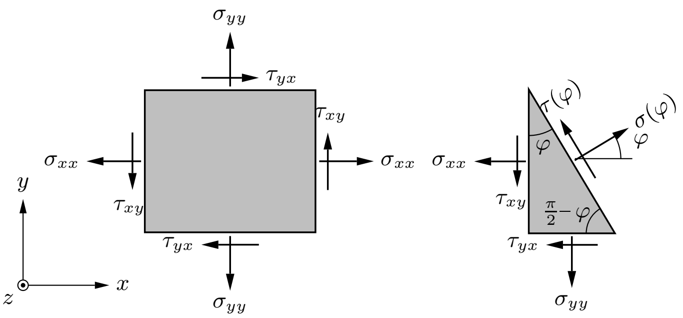
Avd. för Hållfasthetslära
Lunds Universitet
Augusti 2012

Spänningar



Normalspänning: σ = spänningskomponent vinkelrät mot snittyta
Skjuvspänning: τ = spänningskomponent tangentiellt till snittyta

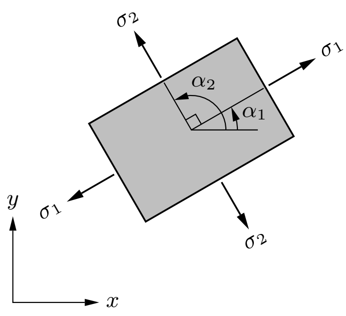
Spänningstillstånd i ett plan, vinkelrätt mot en huvudspänning



$$\sigma_\varphi = \sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi + 2\tau_{xy}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\tau_\varphi = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

Huvudspänningar och huvudspänningsriktningar



$$\left.\begin{array}{c}\sigma_1\\ \sigma_2\end{array}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan\alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

Maximala skjuvspänningen i planet är

$$(\tau_{\max})_{\text{planet}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Maximala skjuvspänningen är

$$\tau_{\max} = \max\left(\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2};\ \frac{|\sigma_1|}{2};\ \frac{|\sigma_2|}{2};\right)$$

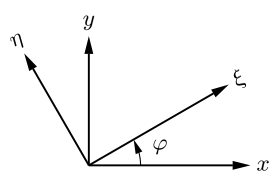
Töjningar

Normaltöjning: $\varepsilon =$ relativ ländändring $= \dfrac{L - L_o}{L_o}$

där L_o=ursprunglig längd, L=ny längd

Skjuvtöjning: $\gamma =$ minskning av ursprunglig rät vinkel (orsakad av deformation)

Deformationstillståndet i ett plan, vinkelrätt mot en huvudspänningsriktning

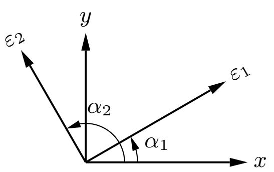


$$\varepsilon_\xi = \varepsilon_x \cos^2\varphi + \varepsilon_y \sin^2\varphi + \gamma_{xy}\sin\varphi\cos\varphi$$
$$\gamma_{\xi\eta} = (\varepsilon_y - \varepsilon_x)\sin 2\varphi + \gamma_{xy}\cos 2\varphi$$

där

- ε_x är töjningen av ett linjeelement i x-riktningen
- ε_y är töjningen av ett linjeelement i y-riktningen
- ε_ξ är töjningen av ett linjeelement i ξ-riktningen
- γ_{xy} är skjuvningen av axelkorset xy, dvs. minskningen av den räta vinkeln mellan x- och y-riktningen
- $\gamma_{\xi\eta}$ är skjuvningen av axelkorset $\xi\eta$, dvs. minskningen av den räta vinkeln mellan ξ- och η-riktningen

Huvudtöjningar och huvudtöjningsriktningar



$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2\end{array}\right\} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\tan\alpha_1 = \frac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_x)}{\gamma_{xy}}$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_x)}{\gamma_{xy}}$$

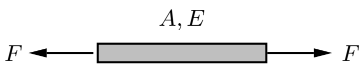
$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

Maximala skjuvningen i planet är

$$(\gamma_{\max})_{\text{planet}} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

Samband mellan spänningar och töjningar

Enaxlig belastning



$$\sigma_x = \frac{F}{A} \qquad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x\,; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Hookes generaliserade lag

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

eller löst med avseende på spänningarna

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1+\nu}[(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)] \\
\sigma_y &= \frac{E}{1+\nu}[(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)] \\
\sigma_z &= \frac{E}{1+\nu}[(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)] \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\
\tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\
\tau_{zx} &= G\gamma_{zx}
\end{aligned}
$$

där

E är elasticitetsmodulen

G är skjuvmodulen $\qquad G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

ν är Poissons tal

Hookes lag vid plant spänningstillstånd

En huvudspänning är noll. Välj koordinatsystemet så att denna huvudspänning är $\sigma_z = 0$. Då gäller också att $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}
\end{aligned}
$$

eller löst med avseende på spänningarna

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy}
\end{aligned}
$$

Flythypoteser

Initiering av plasticitet sker när

$$\sigma_e = \sigma_s$$

där σ_e är effektivspänningen och σ_s är sträckgränsen.

Skjuvspänningshypotesen (Trescas flytkriterium)

$$\sigma_e = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_1 - \sigma_3|; |\sigma_2 - \sigma_3|)$$

Deviationsarbetshypotesen (von Mises flytkriterium)

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)\right]}$$

Detta uttryck är ekvivalent med

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\right]}$$

Speciellt vid plant spänningstillstånd kan hypoteserna skrivas

Skjuvspänningshypotesen	$\sigma_e = \max(\lvert\sigma_1 - \sigma_2\rvert; \lvert\sigma_1\rvert; \lvert\sigma_2\rvert)$
Deviationsarbetshypotesen	$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$

Vid ren skjuvning fås

Skjuvspänningshypotesen	$\sigma_e = 2\lvert\tau\rvert$
Deviationsarbetshypotesen	$\sigma_e = \sqrt{3}\lvert\tau\rvert$

Vridning

För en roterande axel gäller

$$M_v = \frac{P}{\omega}$$

där M_v är vridmomentet i en axel som överför effekten P vid vinkelhastigheten ω

För maximal vridskjuvspänning $\tau_{v\max}$ gäller

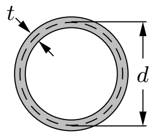
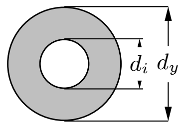
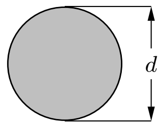
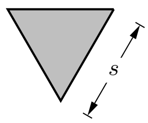
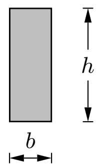
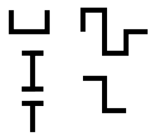
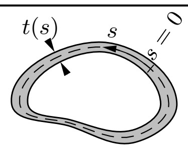
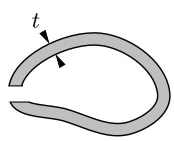
$$\tau_{v\max} = \frac{M_v}{W_v}$$

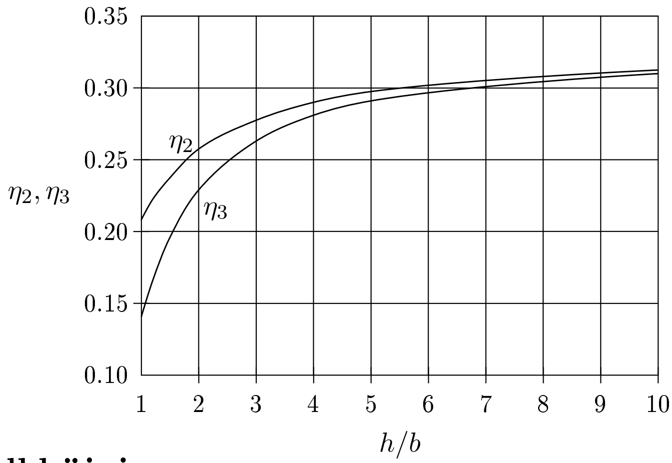
W_v är vridmotståndet (se tabell)

För förvridningsvinkel φ mellan axelns ändytor gäller

$$\varphi = \frac{M_v L}{GK}$$

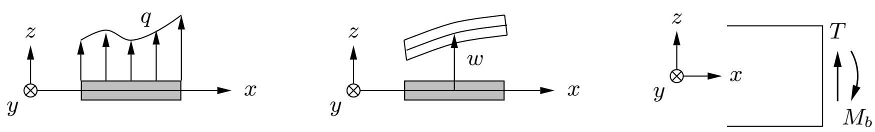
L är axellängden
K är vridstyvhetens tvärsnittsfaktor (se tabell)

	Tvärsnitt	W_v	K
Tunnväggigt cirkulärt slutet tvärsnitt med konstant väggtjocklek		$\dfrac{\pi d^2 t}{2}$	$\dfrac{\pi d^3 t}{4}$
Tjockväggigt cirkulärt slutet tvärsnitt		$\dfrac{\pi(d_y^4 - d_i^4)}{16 d_y}$	$\dfrac{\pi(d_y^4 - d_i^4)}{32}$
Massivt cirkulärt tvärsnitt		$\dfrac{\pi d^3}{16}$	$\dfrac{\pi d^4}{32}$
Massivt liksidigt triangulärt tvärsnitt		$\dfrac{s^3}{20}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{80} s^4$
Massivt rektangulärt tvärsnitt		$\eta_2 h b^2$ η_2 och η_3 bestäms ur diagram	$\eta_3 h b^3$
Öppna tvärsnitt, sammansatta av smala rektanglar		$\dfrac{\sum b_i^3 h_i}{3 b_{\max}}$	$\dfrac{\sum b_i^3 h_i}{3}$
Slutet tunnväggigt rörtvärsnitt av godtycklig form med variabel väggtjocklek		$2 A t_{\min}$ A är den av medelomkretsen omslutna arean	$\dfrac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}}$
Öppet tunnväggigt rörtvärsnitt av godtycklig form med konstant väggtjocklek		$\dfrac{ct^2}{3}$ c är medelomkretsens längd	$\dfrac{ct^3}{3}$



Balkböjning

Positiva definitioner på belastningsintensitet, tvärkraft och böjande moment.



För balkens totala belastning Q, positiv riktad uppåt, gäller

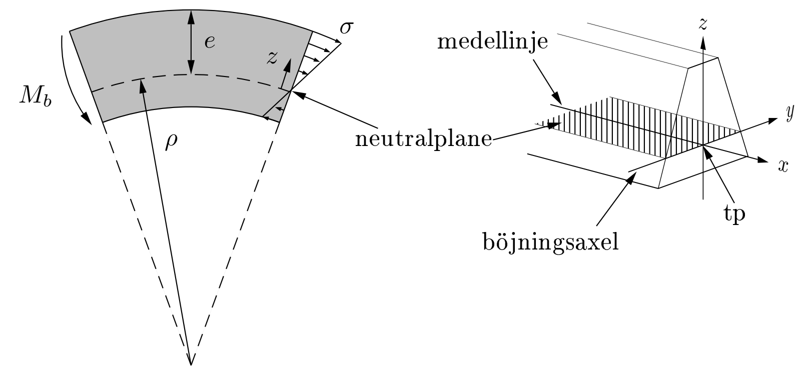
$$Q = \int_0^L q dx$$

Jämviktsdifferentialekvationerna för balken ges av

$$\frac{dT}{dx} = -q$$
$$\frac{dM_b}{dx} = T$$

Böjspänningar (ingen normalkraft)

Koordinatsystemet ligger sådant att x-axeln går genom tvärsnittets tyngdpunkt.



$$\sigma = E\frac{z}{\rho} \qquad \rho \text{ är neutralplanets krökningsradie.}$$

$$\sigma = \frac{M_b}{I_y}z \qquad I_y \text{ är yttröghetsmomentet kring } y\text{-axeln.}$$

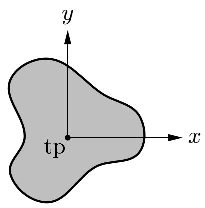
För maximal böjspänning σ_b i ett snitt gäller

$$\sigma_b = \frac{|M_b|}{W_b} \qquad W_b \text{ är böjmotståndet}$$

För W_b gäller

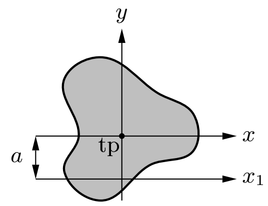
$$W_b = \frac{I_y}{e} \qquad e = |z_{\max}| \text{ är största avståndet från neutralplanet till yttersta fibern}$$

Allmänt om yttröghetsmoment



Yttröghetsmomentet kring x-axel	$I_x = \int y^2 dA$
Yttröghetsmomentet kring y-axel	$I_y = \int x^2 dA$
Deviationsmomentet kring axelkorset xy	$D_{xy} = \int xy dA$

Steiners sats



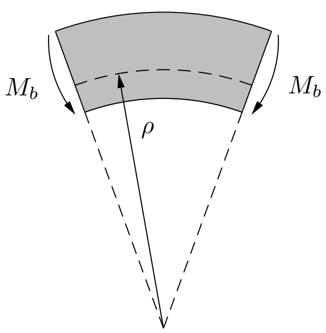
För yttrögetsmomentet I_{x_1} kring en axel parallel med en axel genom tyngdpunkten gäller

$$I_{x_1} = I_x + a^2 A \quad A \text{ är tvärsnittsarean}$$
$$a \text{ är avståndet mellan axlarna.}$$

För tröghetsradien i gäller

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Elastiska linjen



För neutralplanets krökningsradie gäller

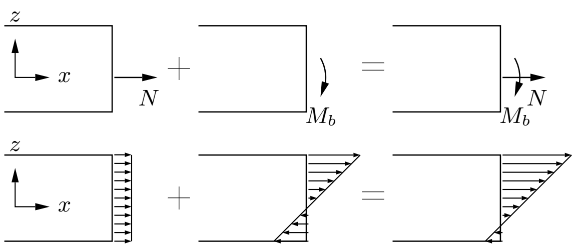
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_b}{EI}$$

där I är tvärsnittytans tröghetsmoment kring böjningsaxeln.

Elastiska linjens differentialekvation är

$$EI\frac{d^2 w}{dx^2} = -M_b$$

Sammansatt belastning

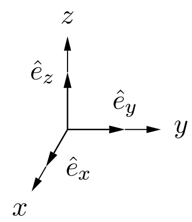


$$\sigma_x = \frac{N}{A} \qquad \sigma_x = \frac{M_b}{I}z \qquad \sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_b}{I}z$$

Balk utsatt för böjande moment och normalkraft

$$\sigma_x = \frac{M_b}{I_y}z + \frac{N}{A}$$

Vektorer



Vektor

$$\begin{aligned}\bar{v} =& v_x\hat{e}_x + v_y\hat{e}_y + v_z\hat{e}z \\ &(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z) = \text{basvektorer} \\ &(v_x, v_y, v_z) = \text{komponenter}\end{aligned}$$

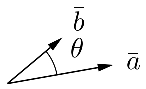
Storleken $v = |\bar{v}|$ av vektorn $\bar{v}$ är

$$v = |\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Enhetsvektorn $\hat{v}$ i $\bar{v}$:s riktning ges av

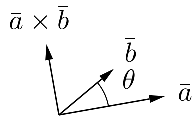
$$\hat{v} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$$

Skalärprodukt



$$\bar{a} \cdot \bar{b} = ab\cos\theta \quad \text{eller} \quad \bar{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Vektorprodukt



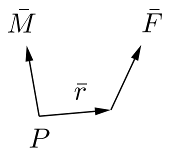
$\bar{a} \times \bar{b}$ är vinkelrät mot planet som ges av $\bar{a}$ och $\bar{b}$ (högerhandssystem: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b}$).

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

och storleken av $\bar{a} \times \bar{b}$ ges av

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \underbrace{ab\sin\theta}_{\text{Area för parallellogrammet som spänns upp av } \bar{a} \text{ och } \bar{b}}$$

Moment



Kraften $\bar{F}$ ger ett moment kring P enligt $\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}$.

Hydrostatik

Tryck

Det absoluta trycket på djupet h i en vätska med densiteten ρ ges av

$$p = p_0 + \rho g h$$

där p_0 är atmosfärstrycket ovanför vätskeytan och $\rho g h$ övertrycket på djupet h.

Lyftkraft

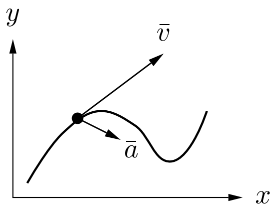
Den resulterande lyftkraften F på en kropp, helt eller delvis nedsänkt i en vätska med densiteten ρ ges av

$$F = \rho V g$$

där V är deplacementet, eller den undanträngda vätskans, volym.

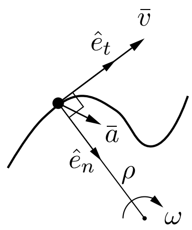
Kinematik för punktmassa

xy-koordinater



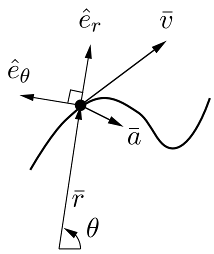
$$\begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \end{cases}$$

Normal-tangentkoordinater



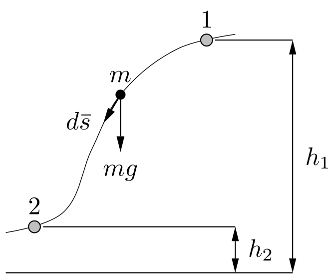
$$\begin{cases} v_t = v = \rho\omega \\ v_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_t = \dot{v} \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = \rho\omega^2 \end{cases}$$

Polära koordinater



$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

Energiprincipen



$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 + \int_1^2 \bar{F}_u \cdot d\bar{s} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2$$

där $\bar{F}_u$ är resultanten till samtliga krafter som verkar på partikeln (exklusive tyngdkraften som redan är beaktad i termen $mg(h_2 - h_1)$).

Elastisk energi i en fjäder

Den elastiska energin V_e som lagras i en fjäder kan skrivas som

$$V_e = \frac{1}{2}k\delta^2$$

där k är fjäderkonstanten och δ fjäderns deformation.

Impluslagen

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt = \int_1^2 d(m\bar{v}) \qquad m\bar{v} \text{ är rörelsemängden för systemet}$$

och $\bar{F}$ är kraftresultanten som verkar på systemet.

Rak central stöt

Impulslagen ger (då $\bar{F} = 0$) att rörelsemängden före stöt = rörelsemängden efter stöt.

$$\text{studskoefficient} = \frac{\text{hastighet med vilken kropparna avlägsnar sig från varandra}}{\text{hastighet med vilken kropparna närmar sig varandra}}$$

Stel kropp i plan rörelse

Rörelsemängdsmomentet kring en punkt P ges av

$$\bar{H}_p = \int \bar{r} \times \bar{v} dm$$

Rotation kring fix axel

Från rörelsemängdsmomentet kring fix axel genom punkten P fås

$$M_p = \frac{dH_p}{dt}$$

där M_p är momentet kring axeln genom punkten P och H_p är rörelsemängdsmomentet kring axeln genom punkten P. Vi har

$$H_p = J_p\omega$$

där ω är vinkelhastigheten och där masströghetsmomentet ges av

$$J_p = \int R^2 dm$$

(typiska masströghetsmoment ges av tabell senare)

Allmän plan rörelse

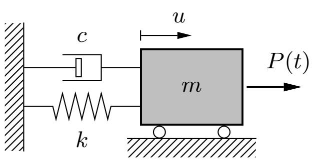
$$\bar{F} = m\bar{a}_{TP}$$
$$M_{TP} = \frac{dH_{TP}}{dt}$$

där M_{TP} är momentet kring tyngdpunkten (TP) och H_{TP} är rörelsemängdsmomentet kring TP. Vi har

$$H_{TP} = J_{TP}\omega$$

där J_{TP} är masströghetsmomentet och ω vinkelhastigheten. Typiska masströghetsmoment ges av tabell senare.

Svängningar - system med en frihetsgrad



Fjäder $F_e = ku$, dämpare $F_d = c\dot{u}$.

Vi får

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t)$$

omskrivning ger

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_o\dot{u} + \omega_o^2 u = \frac{P(t)}{m}$$

där

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\xi = \frac{c}{2m\omega_o} \quad \text{relativa dämpningen}$$

Odämpat system

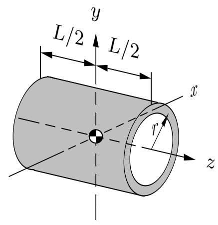
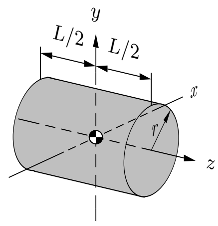
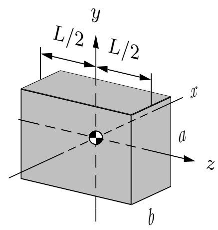
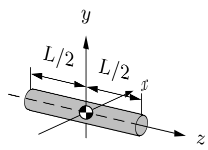
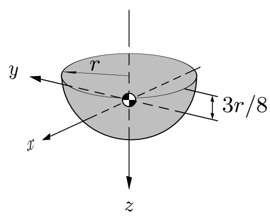
$$\ddot{u} + \omega_o^2 u = \frac{P(t)}{m} \qquad \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{ egenvinkelfrekvens [rad/s]}$$

Om yttre kraft $P(t) = 0$ fås

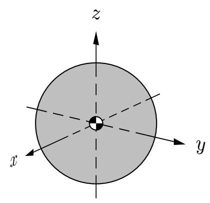
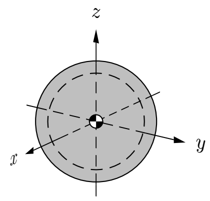
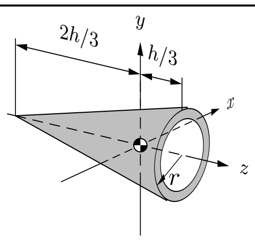
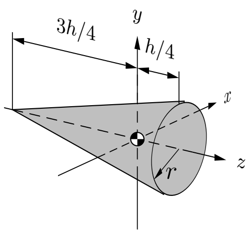
$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = \text{ period [s]} = \text{tid för hel svängning}$$

$$f = \frac{1}{T} = \text{ egenfrekvens [cykler/s]} = \text{Hertz}$$

Masströghetsmoment med avseende på tyngdpunkt

	Tvärsnitt	J_{TP}
Tunnväggigt rör		$J_x = J_y = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}mL^2$ $J_z = mr^2$
Homogen cylinder		$J_x = J_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mL^2$ $J_z = \frac{1}{2}mr^2$
Rätvinkling parallellepiped		$J_x = \frac{1}{12}m(a^2 + L^2)$ $J_y = \frac{1}{12}m(b^2 + L^2)$ $J_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
Jämntjock smal stång		$J_x = J_y = \frac{1}{12}mL^2$ $J_z \approx 0$
Halvklot		$J_x = J_y = \frac{83}{320}mr^2$ $J_z = \frac{2}{5}mr^2$

Masströghetsmoment med avseende på tyngdpunkt

Homogent klot		$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5}mr^2$
Tunnväggigt sfäriskt skal		$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3}mr^2$
Koniskt skal		$J_x = J_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$ $J_z = \frac{1}{2}mr^2$
Rät cirkulär kon		$J_x = J_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$ $J_z = \frac{3}{10}mr^2$