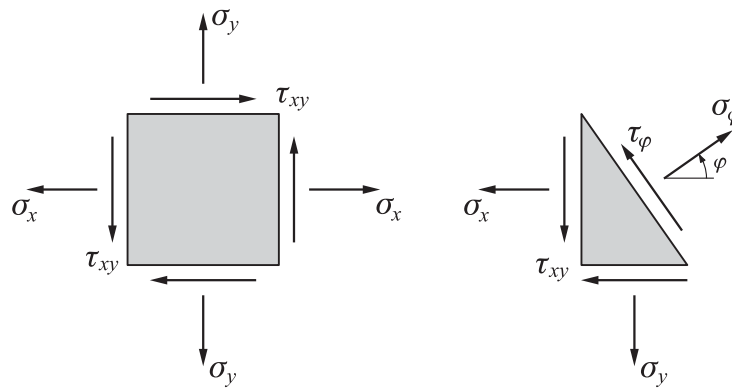


Kompletterande formelsamling i hållfasthetslära

Göran Wihlborg

LTH 2004

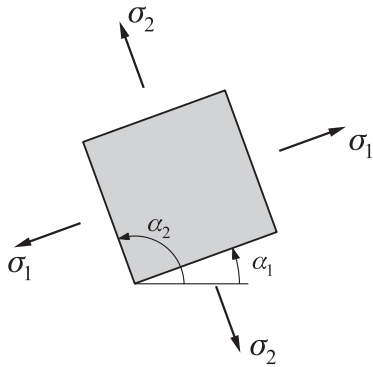
Spänningstillståndet i ett plan, vinkelätt mot en huvudspänningsriktning



$$\sigma_{\varphi} = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\tau_{\varphi} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

Huvudspänningar och huvudspänningsriktningar



$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$

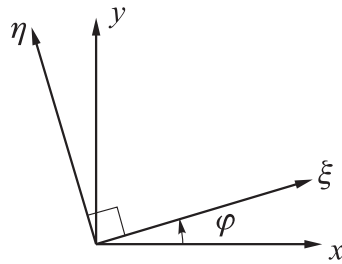
$$\tan \alpha_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

Maximala skjuvspänningen i planet är $(\tau_{\max})_{\text{planet}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

Maximala skjuvspänningen är $\tau_{\max} = \max\left(\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}; \frac{|\sigma_1|}{2}; \frac{|\sigma_2|}{2}\right)$

Deformationstillståndet i ett plan, vinkelrätt mot en huvudspänningsriktning



$$\varepsilon_{\xi} = \varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_y \sin^2 \varphi + \gamma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\gamma_{\xi\eta} = (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin 2\varphi + \gamma_{xy} \cos 2\varphi$$

ε_x är töjningen av ett linjeelement i x -riktningen

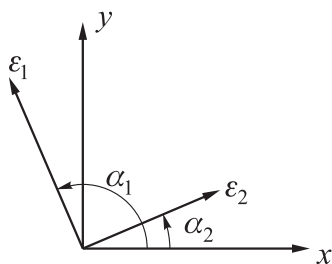
ε_y " " " " " i y -riktningen

ε_{ξ} " " " " " i ξ -riktningen

γ_{xy} är skjuvningen av axelkorset xy , dvs minskningen av den rätta vinkeln mellan x - och y -riktningarna

$\gamma_{\xi\eta}$ är skjuvningen av axelkorset $\xi\eta$, dvs minskningen av den rätta vinkeln mellan ξ - och η -riktningarna

Huvudtöjningar och huvudtöjningsriktningar



$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} \right\} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_x)}{\gamma_{xy}}$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_x)}{\gamma_{xy}}$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

Maximala skjuvningen i planet är $(\gamma_{\max})_{\text{planet}} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$

Samband mellan spänningar och töjningar

Hookes generaliserade lag

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

eller löst med avseende på spänningarna:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}$$

$$\tau_{zx} = G \cdot \gamma_{zx}$$

E är elasticitetsmodulen

G är skjuvmodulen $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

ν är Poissons tal

Hookes lag vid plant spänningstillstånd

En huvudspänning är noll. Välj koordinatsystemet så att denna huvudspänning är $\sigma_z = 0$.

Då gäller också att $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

eller löst med avseende på spänningarna

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

Flythypoteser

Skjuvspänningshypotesen

$$\sigma_e = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_1 - \sigma_3|; |\sigma_2 - \sigma_3|)$$

Deviationsarbetshypotesen

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

Speciellt vid plant spänningstillstånd kan hypoteserna skrivas:

$$\text{Skjuvspänningshypotesen} \quad \sigma_e = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_1|; |\sigma_2|)$$

$$\text{Deviationsarbetshypotesen} \quad \sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

Vridning

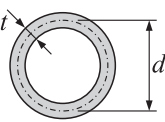
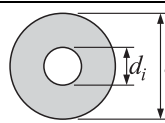
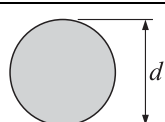
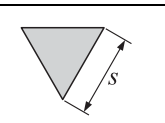
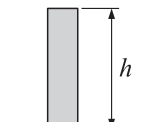
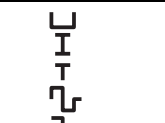
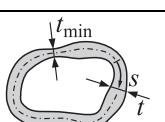
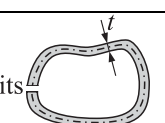
$$M_v = \frac{P}{\omega} \quad M_v \text{ är vridmomentet i en axel som överför effekten } P \text{ vid vinkelhastigheten } \omega.$$

För maximala vridskjuvspänningen $\tau_{v\max}$ gäller

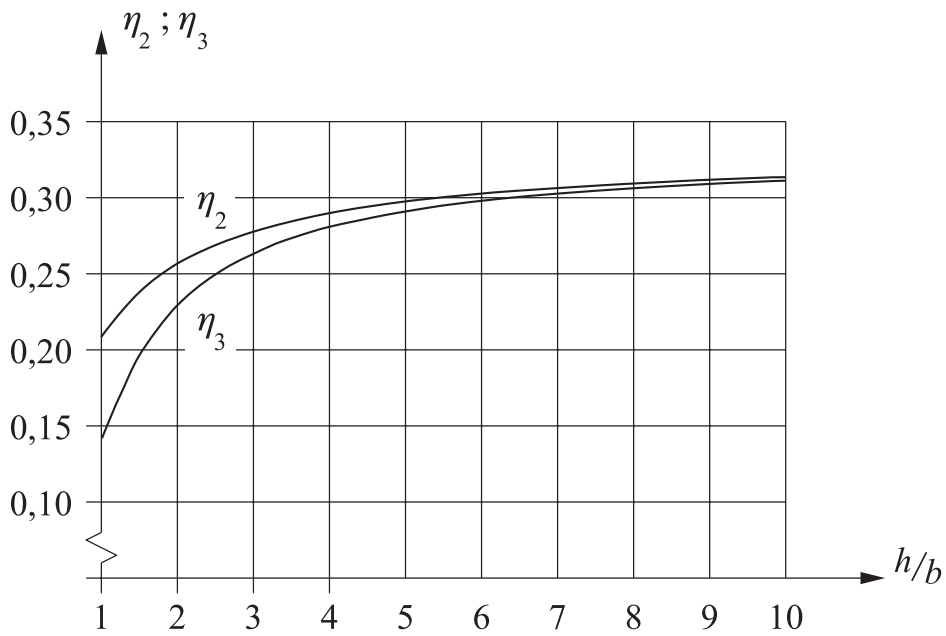
$$\tau_{v\max} = \frac{M_v}{W_v} \quad W_v \text{ är vridmotståndet (se tabell).}$$

För förvridningsvinkeln φ mellan axelns ändytor gäller

$$\varphi = \frac{M_v L}{GK} \quad L \text{ är axellängden.} \\ K \text{ är vridstyvhets tvärsnittsfaktor (se tabell).}$$

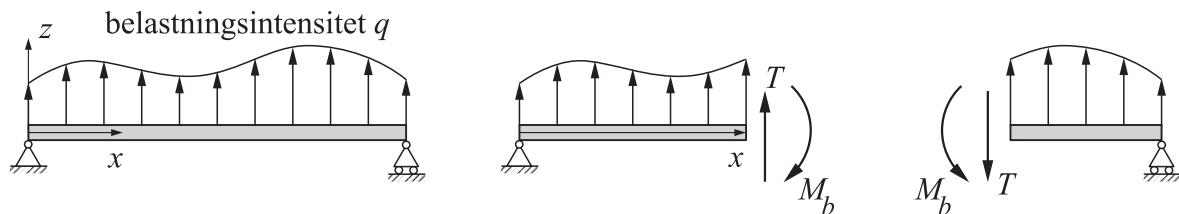
Tvärsnitt		W_v	K
Tunnväggigt cirkulärt slutet tvärsnitt med konstant vägg-tjocklek		$\frac{\pi d^2 t}{2}$	$\frac{\pi d^3 t}{4}$
Tjockväggigt cirkulärt slutet tvärsnitt		$\frac{\pi(d_y^4 - d_i^4)}{16d_y}$	$\frac{\pi(d_y^4 - d_i^4)}{32}$
Massivt cirkulärt tvärsnitt		$\frac{\pi d^3}{16}$	$\frac{\pi d^4}{32}$
Massivt liksidigt triangulärt tvärsnitt		$\frac{s^3}{20}$	$\frac{\sqrt{3}}{80} s^4$
Massivt rektangulärt tvärsnitt		$\eta_2 h b^2$	$\eta_3 h b^3$
		η_2 och η_3 bestäms ur diagram	
Öppna tvärsnitt, sammansatta av smala rektanglar		$\frac{\sum b_i^3 h_i}{3b_{\max}}$	$\frac{\sum b_i^3 h_i}{3}$
Slutet tunnväggigt rörtvärsnitt av godtycklig form med variabel vägg-tjocklek		$2A t_{\min}$	$\frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}}$
		A är den av medelomkretsen omslutna arean	
Öppet tunnväggigt rör-tvärsnitt av godtycklig form med konstant vägg-tjocklek		$\frac{c t^2}{3}$	$\frac{c t^3}{3}$
		c är medelomkretsens längd	

Vridmotståndet W_v och vridstyvhets tvärsnittsfaktor K



Balkböjning

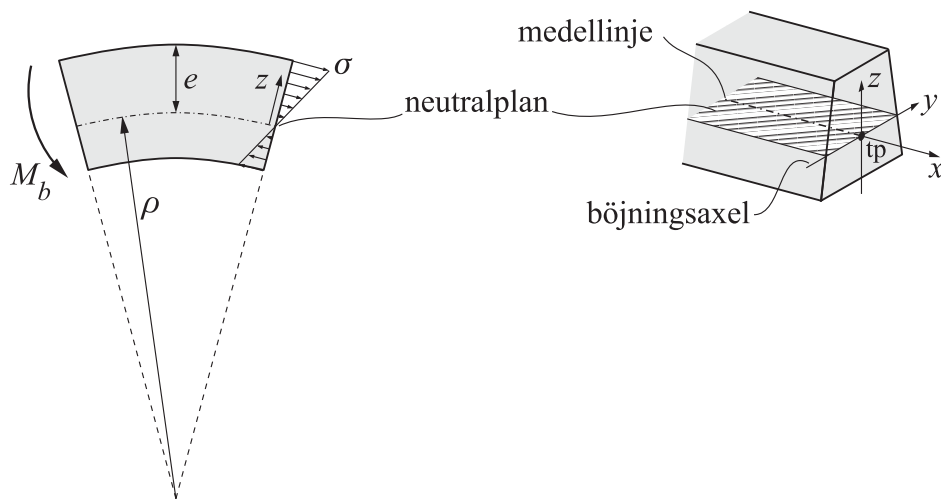
Positiva definitioner på belastningsintensitet, tvärkraft och böjande moment.



För balkens totala belastning Q , riktad uppåt, gäller $Q = \int_0^L q \, dx$

$$\begin{cases} \frac{dT}{dx} = -q \\ \frac{dM_b}{dx} = T \end{cases}$$

Böjspänningar



$$\sigma = E \frac{z}{\rho} \quad \rho \text{ är neutralplanets krökningsradie.}$$

$$\sigma = \frac{M_b}{I_y} z \quad I_y \text{ är ytttröghetsmomentet kring } y\text{-axeln.}$$

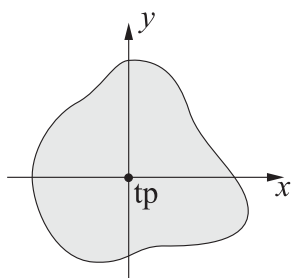
För maximala böjspänningen σ_b i ett snitt gäller

$$\sigma_b = \frac{|M_b|}{W_b} \quad W_b \text{ är böjmotståndet.}$$

För W_b gäller

$$W_b = \frac{I_y}{e} \quad e = |z|_{\max} \text{ är största avståndet från neutralplanet till yttersta fibern.}$$

Allmänt om ytttröghetsmoment



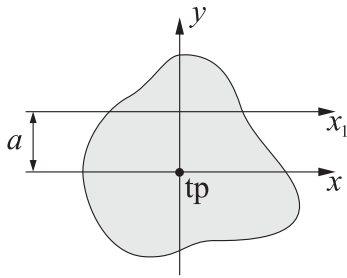
$$\text{Ytttröghetsmomentet kring } x\text{-axeln} \quad I_x = \int y^2 dA$$

$$\text{Ytttröghetsmomentet kring } y\text{-axeln} \quad I_y = \int x^2 dA$$

$$\text{Deviationsmomentet kring axelkorset } xy \quad D_{xy} = \int xy dA$$

Steiners sats

För yttröghetsmomentet I_{x_1} kring en axel parallell med en axel genom tyngdpunkten gäller



$$I_{x_1} = I_x + a^2 A$$

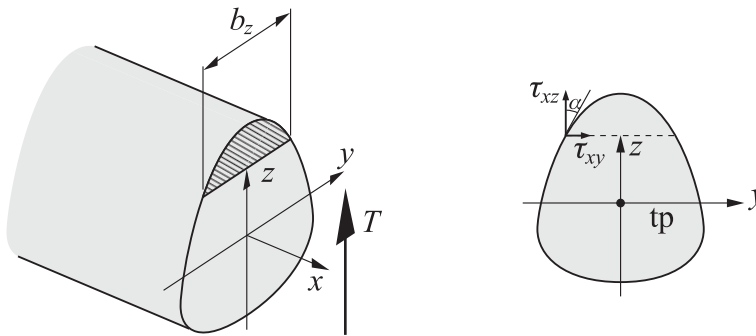
A är tvärsnittsarean.

a är avståndet mellan axlarna.

För tröghetsradien i gäller

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Böjskjuvspänningar i symmetriska balktvärsnitt



$$\tau_{xz} = \frac{T \cdot S_z}{I_y \cdot b_z}$$

T är tvärkraften.

S_z är statiska momentet kring y -axeln för den del av sektionen som är belägen ovanför snittet (streckade ytan i figuren).

I_y är yttröghetsmomentet kring y -axeln för hela snittet.

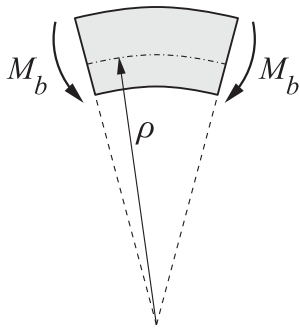
b_z är spänningsupptagande bredden i snittet.

$$\tau_{xy} = -\tau_{xz} \frac{2y}{b_z} \tan \alpha$$

$$\tau_{\max} = \mu \frac{T}{A}$$

μ är en konstant som beror av tvärsnittets form.

Elastiska linjen



För neutralplanets krökningsradie ρ gäller

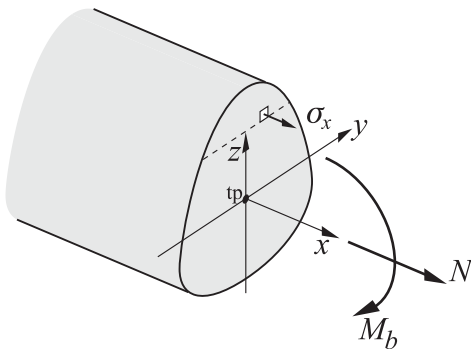
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_b}{EI}$$

I är tvärsnittsyans tröghetsmoment kring böjningsaxeln.

Elastiska linjens differentialekvation är $EIw'' = -M_b$

Sammansatt belastning

Balk utsatt för böjande moment och normalkraft



$$\sigma_x = \frac{M_b}{I_y} z + \frac{N}{A}$$

Reologiska modeller

Byggelement:

Elastiskt $\sigma = E \cdot \varepsilon$ 

Visköst $\sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon}$ 

Räknelagar

- I Vid seriekoppling av två element är totala töjningen lika med summan av elementens töjningar. Båda elementen är härvid belastade med samma spänning.
- II Vid parallellkoppling av två element är den totala spänning som belastar parallellkopplingen lika med summan av elementens spänningar. Båda elementen är härvid utsatta för samma töjning.

Tryckkärlsberäkningar enligt SS-EN 13445

Tunnväggiga sfäriska tryckkärl för inre tryck

Minsta erforderliga godstjockleken e i mm för ett sfäriskt kärl med inre övertryck beräknas ur

$$e = \frac{P \cdot D_i}{4f \cdot z - P} \quad \text{alternativt} \quad e = \frac{P \cdot D_e}{4f \cdot z + P}$$

D_i och D_e är inner- respektive ytterdiameter i mm

P är beräkningstryck i N/mm^2 (övertryck), vilket alltså är det högsta övertryck som kan förekomma i kärlet

f nominellt tillåten i spänning i N/mm^2 för det aktuella materialet, vid den högsta temperatur t som materialet kommer att utsättas för. Exempel på beräkning av f :

- för icke-austenitiska stål
med brottförlängning $A < 30\%$

$$f = \min \left(\frac{R_{p0,2/t}}{1,5}; \frac{R_{m/20}}{2,4} \right)$$

- för austenitiska stål
med brottförlängning $A > 35\%$

$$f = \max \left[\left(\frac{R_{p1,0/t}}{1,5} \right); \min \left(\frac{R_{p1,0/t}}{1,2}; \frac{R_{m/t}}{3} \right) \right]$$

där $R_{pX/t}$ är förlängningsgränsen med $X\%$ resttöjning vid temperaturen t och $R_{m/t}$ är brottgränsen vid t °C

z är styrkefaktorn, vilken anger styrkeförhållandet mellan svetsen och grundmaterialet vid en svetsfog.

För beräkning av den nominella godstjocklek som materialet i tryckkärlet minst måste ha, skall den minsta erforderliga godstjockleken e ökas med korrosionstillägget c och tillverkningstoleransen δ_e , dvs

$$e_{n,\min} = e + c + \delta_e$$

Då materialets nominella godstjocklek e_n är känd görs spänningsberäkningar i kärlet med det som kallas för beräkningstjockleken e_a .

$$e_a = e_n - c - \delta_e$$

Beräkningstrycket kan bestämmas ur

$$P_{\max} = \frac{4f \cdot z \cdot e_a}{D_m}$$

där D_m är medeldiametern i kärlet. Giltighetsområdet för formlerna är $e \leq 0,16 D_e$

Tunnväggiga cylindriska mantlar för inre tryck

Minsta erforderliga godstjockleken beräknas (med beteckningar enligt tidigare) ur:

$$e = \frac{P \cdot D_i}{2f \cdot z - P} \quad \text{alternativt} \quad e = \frac{P \cdot D_e}{2f \cdot z + P}$$

Beräkningstrycket beräknas ur

$$P_{\max} = \frac{2f \cdot z \cdot e_a}{D_m}$$

Giltighetsområdet är $e \leq 0,16 D_e$

Skruvförband

Sambandet mellan moment och kraft i en skruv

$$M_v = \frac{Fd_m}{2} \tan(\alpha + \rho_1)$$

M_v är åtdragningsmomentet

F är kraften i skruven

d_m är gängans medeldiameter

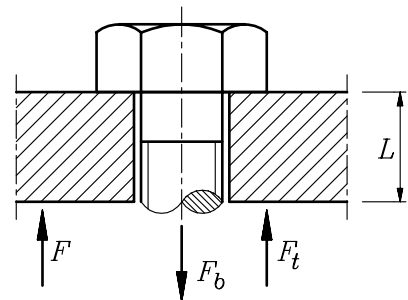
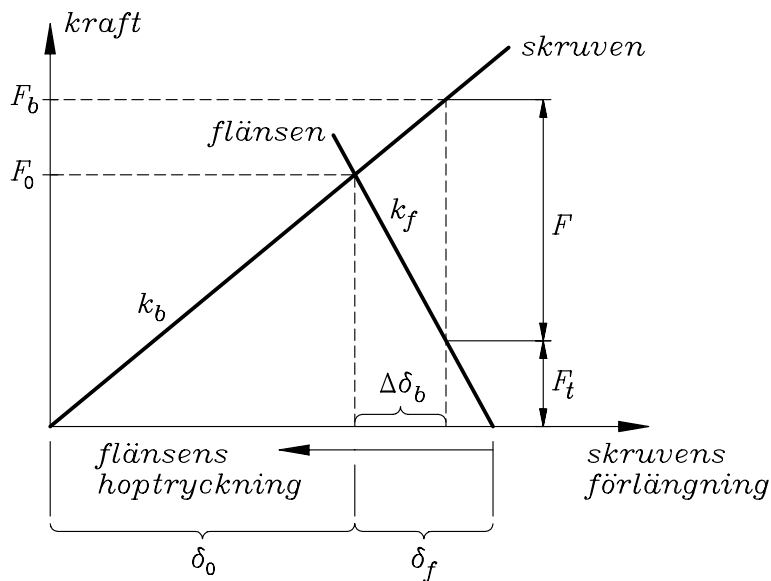
α är gängans stigningsvinkel

$$\tan \rho_1 = \frac{\mu}{\cos \beta}$$

β är gängans halva profilvinkel (för M- och UN-gängor är $\beta=30^\circ$)

μ är friktionskoefficienten i gängan

Kraftspelet mellan skruv och omgivning



$$F_b = F_0 + F \frac{k_b}{k_b + k_f}$$

F_0 är förspänningskraften i skruven

F_b är maximala kraften i skruven

$$F_t = F_0 - F \frac{k_f}{k_b + k_f}$$

F_t är tätningskraften mellan fläns och underlag då förbandet belastas med yttre last

F är den yttre lasten på varje skruvförband

Skruvfjädrar

Maximala skjuvspänningen τ_{\max} och deformationen δ för en skruvfjäder beror på trådtvärsnittets form, lindningens medeldiameter D , antalet fjädervarv z och kraften F .

Cirkulärt trådtvärsnitt

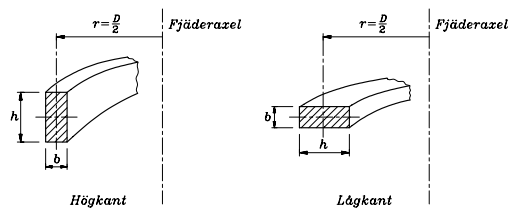
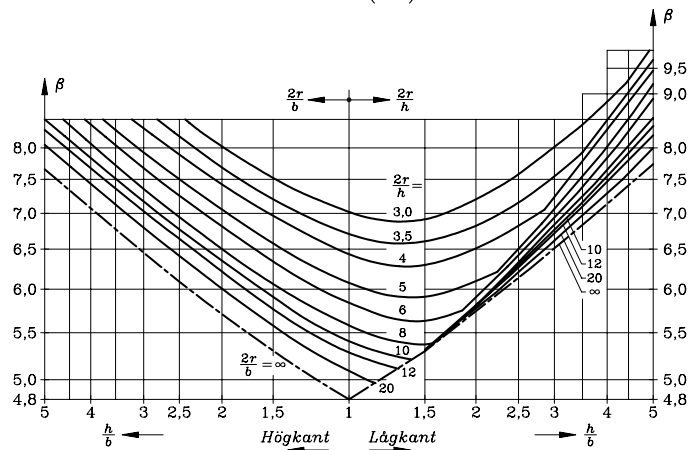
$$\tau_{\max} = \alpha \frac{8FD}{\pi d^3} \qquad \delta = \frac{8FD^3 z}{Gd^4}$$

d är trådens diameter

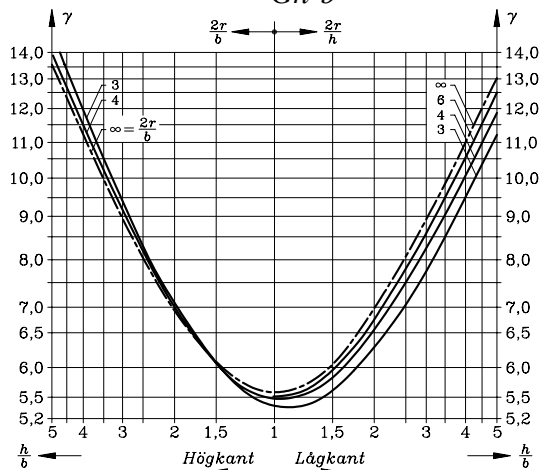
α är formfaktorn enligt Bodelind-Perssons tabellsamling

Rektangulärt trådtvärsnitt

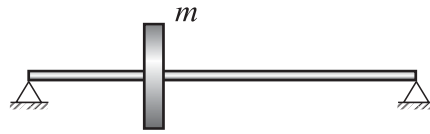
$$\tau_{\max} = \beta \frac{Fr}{(bh)^{1,5}}$$



$$\delta = \gamma \frac{FD^3 z}{Gh^2 b^2}$$



Kritiska varvtal



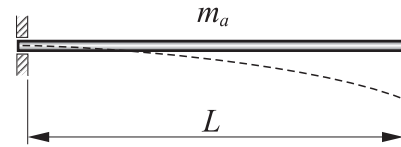
Utan hänsyn till axelmassan är kritiska vinkelhastigheten

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

En slät axel med massan m_a och utan punktmassor har en lägsta kritiska vinkelhastighet som beror på infästningen:

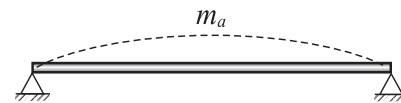
- a) ena ändpunkten har momentinspant lager

$$\omega_{kr_a} = 3,52 \sqrt{\frac{EI}{m_a L^3}}$$



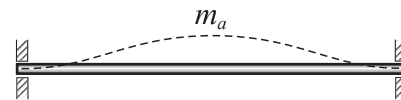
- b) båda ändpunkterna har momentfria lager

$$\omega_{kr_a} = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m_a L^3}}$$



- c) båda ändpunkterna har momentinspända lager

$$\omega_{kr_a} = 22,4 \sqrt{\frac{EI}{m_a L^3}}$$



Dunkerleys formel för lägsta kritiska vinkelhastigheten ω_{kr} för en axel med n st punktmassor med hänsyn också tagen till axelmassan

$$\frac{1}{\omega_{kr}^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_{kr_i}^2} + \frac{1}{\omega_{kr_a}^2}$$

där

$$\omega_{kr_i} = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}$$

är egenvinkelhastigheten för massan i när enbart denna massa finns i systemet.

