

figur 1.7), var och en riktningarna. Huvud-

(1.21)

1.6.2 Cylindriska koordinater

Komponenterna hos kraften per volymsenhet är K_r , K_φ , K_z . Jämviktsekvationerna blir

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + K_r = 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} + K_\varphi = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} + K_z = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

1.6.3 Sfäriska koordinater

Komponenterna hos kraften per volymsenhet är K_r , K_ϑ , K_φ . Jämviktsekvationerna blir

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\vartheta r}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\vartheta - \sigma_\varphi + \tau_{\vartheta r} \cot \vartheta) + K_r = 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r} (3\tau_{r\varphi} + 2\tau_{\varphi \vartheta} \cot \vartheta) + K_\varphi = 0 \\ \frac{\partial \tau_{\vartheta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \tau_{\varphi \vartheta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} ((\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi) \cot \vartheta + 3\tau_{\vartheta r}) + K_\vartheta = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

1.6.4 Tensorform och matrisform

1.6.4.1 KARTESISK TENSORFORM

På tensorform kan rörelseekvationerna (1.22) och (1.2) skrivas

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + K_j = \rho \ddot{u}_j \quad \sigma_{ij,i} + K_j = \rho \ddot{u}_j \quad (1.25)$$

respektive

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.26)$$

I ekvation (1.25) har *summationskonventionen* använts och i den andra ekvationen *derivationskonventionen*, detta behandlas i referenslitteraturen.

(1.22)

1.6.4.2 ALLMÄN TENSORFORM

På allmän tensorform kan jämviktsekvationerna (1.25) bland annat skrivas

$$\sigma^{ij} |_{i} + K^j = 0 \quad (1.27)$$

där symbolen $|$ betecknar *kovariant derivata* enligt allmän tensoranalys nödvändig vid kroklinjiga koordinater, se referenslitteraturen.

2.3.2 Cylindriska koordinater

Töjningskomponenterna relateras till förskjutningsvektorn $\mathbf{u} = (u_r, u_\varphi, u_z)$

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \\ \gamma_{\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \\ \gamma_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \end{cases} \quad (2.5)$$

2.3.3 Sfäriska koordinater

Töjningskomponenterna relateras till förskjutningsvektorn $\mathbf{u} = (u_r, u_\varphi, u_\vartheta)$

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\vartheta}{r} \cot \vartheta + \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \\ \gamma_{\varphi\vartheta} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial \vartheta} - u_\varphi \cot \vartheta \right] + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \varphi} \\ \gamma_{\vartheta r} = \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} \end{cases} \quad (2.6)$$

2.3.4 Töjningsmatris

Införes beteckningarna

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \quad (\text{cykl}) \quad (2.7)$$

kan en töjningsmatris \mathbf{T} definieras, vilken kan visas vara en tensor, se 2.3.5 nedan.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

3.2.2 Linjärt elastiska material

3.2.2.1 ISOTROPT MATERIAL

Hookes lag (för linjärt termoelastiskt material)

För ett homogent, isotropt, linjärt elastiskt material gäller, på flexibilitetsform, Hookes generaliserade lag som här kompletterats med termisk utvidgning

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + a\Delta T; & \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + a\Delta T; & \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + a\Delta T; & \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \end{cases} \quad (3.1)$$

där E = elasticitetsmodulen, ν = Poissons konstant, G = skjuvmodulen, a = längdutvidgningskoefficienten och ΔT = temperaturökningen

Mellan E , ν och G råder sambandet

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.2)$$

I de fall då Hookes lag gäller sammanfaller huvudspänningsriktningarna med huvudtöjningsriktningarna.

Löses spänningarna ur ekvation (3.1) erhålles Hookes lag på styvhetsform enligt

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] - \frac{Ea\Delta T}{1 - 2\nu}; & \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \sigma_y = \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] - \frac{Ea\Delta T}{1 - 2\nu}; & \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \\ \sigma_z = \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] - \frac{Ea\Delta T}{1 - 2\nu}; & \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \end{cases} \quad (3.3)$$

Hookes lag vid plant spänningstillstånd

Låt en huvudspänning vara $\sigma_z = 0$, varmed $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu\sigma_y] + a\Delta T; & \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu\sigma_x] + a\Delta T; & \gamma_{yz} = 0 \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}[\sigma_x + \sigma_y] + a\Delta T; & \gamma_{zx} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

eller löst med avseer

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_x \\ \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_y \\ \sigma_z = 0; \end{cases}$$

Hookes lag vid pl

Låt en huvudtöjning

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1 - \nu^2}{E} (\sigma_x \\ \varepsilon_y = \frac{1 - \nu^2}{E} (\sigma_y \\ \varepsilon_z = 0; \end{cases}$$

eller löst med avseend

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1 + \nu} [\varepsilon_x + \\ \sigma_y = \frac{E}{1 + \nu} [\varepsilon_y + \\ \sigma_z = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - \nu)} \end{cases}$$

Tensorformer för h

På tensorform kan Ho

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij})$$

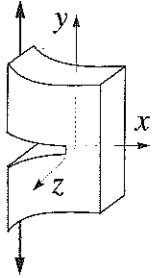
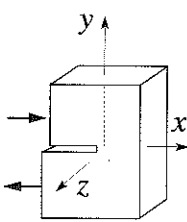
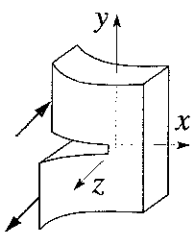
$$\sigma_{ij} = 2G \left[\varepsilon_{ij} + \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right]$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

samt med användning

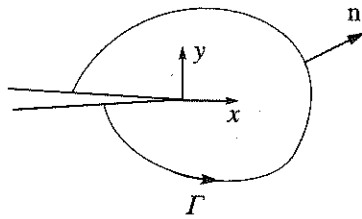
$$\varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3K} + 3a\Delta T$$

$$e_{ij} = \frac{s_{ij}}{2G} \quad \text{for}$$

Modus	I	II	III
Förskjutningsdiskontinuitet	u_y	u_x	u_z
	 <p>Vidgande i xy-planet</p>	 <p>Glidande i xy-planet</p>	 <p>Glidande tvärs xy-planet</p>

Figur 23.1 Definition av brottmekaniska modus

23.3 J-INTEGRALEN



Figur 23.2 Definitioner av storheter för J-integralen

För två-dimensionella sprickproblem definieras en integral J tagen längs en väg Γ runt en sprickspets (figur 23.2) enligt

$$J = \int_{\Gamma} \left(A' dy - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) \quad (23.1)$$

där $A' = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$ är deformationsarbetet per volymsenhet.

För homogena, elastiska material där $A' = W'$ är en töjningsenergifunktion med egenskapen

Formelsamling i hållfasthetslära

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W'}{\partial \epsilon_{ij}}$$

är J oberoende av v

För sådana mate

$$J = -\frac{1}{n} \frac{\partial U}{\partial a}$$

där $n=1$ för kan kroppens tjocklek c

23.4 LINJÄRT

I den linjärt elastisk isotrop elastisk teori tensitetsfaktorema

$$K_I = \lim_{x \rightarrow +0} \sigma_y$$

$$K_{II} = \lim_{x \rightarrow +0} \tau_{xy}$$

$$K_{III} = \lim_{x \rightarrow +0} \tau_{yz}$$

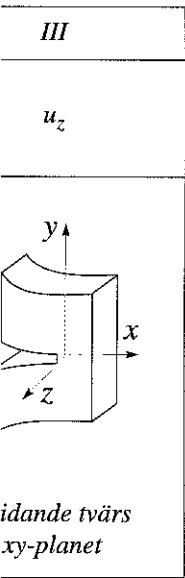
Figur 23.3 Koo

23.4.1 Asymp

Spänningar och för Härvid är κ definie

$$\kappa = \begin{cases} 3-4\nu \\ (3-\nu)/\nu \end{cases}$$

Värdet hos spänning desproblemet enligt



$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W'}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{23.2}$$

är J oberoende av vägen Γ .

För sådana material gäller med potentiella energin U enligt (7.11)

$$J = -\frac{1}{nt} \frac{\partial U}{\partial a} \tag{23.3}$$

där $n=1$ för kantspricka och $n=2$ för inre spricka med symmetriska förhållanden, t är kroppens tjocklek och a är spricklängden.

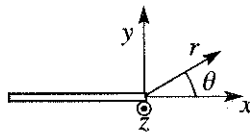
23.4 LINJÄRT ELASTISK BROTTMEKANISK TEORI

I den linjärt elastiska brottmekaniken antas strukturen kunna beskrivas med enbart linjär isotrop elastisk teori. Tillståndet vid en sprickspets beskrivs då entydigt av *spänningsintensitetsfaktorerna* K_I , K_{II} och K_{III} definierade enligt (23.4)-(23.6).

$$K_I = \lim_{x \rightarrow +0} \sigma_y(x, 0) \sqrt{2\pi x} \tag{23.4}$$

$$K_{II} = \lim_{x \rightarrow +0} \tau_{xy}(x, 0) \sqrt{2\pi x} \tag{23.5}$$

$$K_{III} = \lim_{x \rightarrow +0} \tau_{yz}(x, 0) \sqrt{2\pi x} \tag{23.6}$$



Figur 23.3 Koordinater vid sprickspets

23.4.1 Asymptotiska lösningar vid sprickspetsen

Spänningar och förskjutningar i sprickspetsens närhet kan skrivas enligt (23.7) - (23.12). Härvid är κ definierat enligt

$$\kappa = \begin{cases} 3-4\nu & \text{plan deformation} \\ (3-\nu)/(1+\nu) & \text{plan spänning} \end{cases}$$

Värdet hos spänningsintensitetsfaktorerna K_I , K_{II} och K_{III} beror av det aktuella randvärdesproblemet enligt avsnitt 23.4.3.

Modus I

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right) + \sigma_{xx0} + O(\sqrt{r}) \\ \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right) + O(\sqrt{r}) \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + O(\sqrt{r}) \\ \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_z = \begin{cases} \nu(\sigma_x + \sigma_y) & \text{plan deformation} \\ 0 & \text{plan spänning} \end{cases} \end{cases} \quad (23.7)$$

$$\begin{cases} u = \frac{(1+\nu)K_I}{4\pi E} \sqrt{2\pi r} \left((2\kappa-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) + O(r) \\ v = \frac{(1+\nu)K_I}{4\pi E} \sqrt{2\pi r} \left((2\kappa+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) + O(r) \\ w = \begin{cases} 0 & \text{plan deformation} \\ -\frac{\nu}{E} \int (\sigma_x + \sigma_y) dz & \text{plan spänning} \end{cases} \end{cases} \quad (23.8)$$

Modus II

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right) + O(\sqrt{r}) \\ \sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + O(\sqrt{r}) \\ \tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right) + O(\sqrt{r}) \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_z = \begin{cases} \nu(\sigma_x + \sigma_y) & \text{plan deformation} \\ 0 & \text{plan spänning} \end{cases} \end{cases} \quad (23.9)$$

Modus II forts

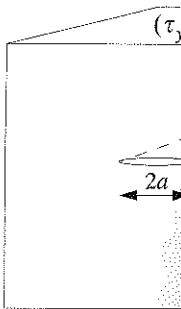
$$\begin{cases} u = \frac{(1+\nu)K_{II}}{4\pi E} \sqrt{2\pi r} \left((2\kappa-1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) + O(r) \\ v = \frac{(1+\nu)K_{II}}{4\pi E} \sqrt{2\pi r} \left((2\kappa+1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) + O(r) \\ w = \begin{cases} 0 \\ -\frac{\nu}{E} \int (\sigma_x + \sigma_y) dz \end{cases} \end{cases}$$

Modus III

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \\ w = \frac{2(1+\nu)}{\pi E} \int \tau_{xz} dz \\ u = v = 0 \end{cases}$$

23.4.2 K_I, K_{II}

Ett intressant resultat för en solid utsatt för ett h



Figur 23.4 Spänning

Modus II forts

(23.7)
$$\left\{ \begin{aligned} u &= \frac{(1+\nu)K_{II}\sqrt{2\pi r}}{4\pi E} \left((2\kappa+3)\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2} \right) + O(r) \\ v &= \frac{(1+\nu)K_{II}\sqrt{2\pi r}}{4\pi E} \left((2\kappa-3)\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2} \right) + O(r) \\ w &= \begin{cases} 0 & \text{plan deformation} \\ -\frac{\nu}{E} \int (\sigma_x + \sigma_y) dz & \text{plan spänning} \end{cases} \end{aligned} \right. \quad (23.10)$$

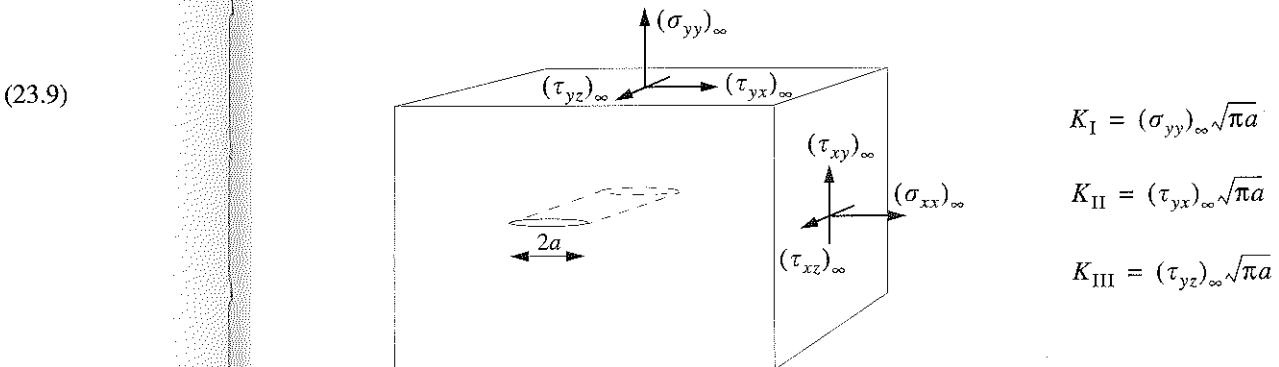
Modus III

(23.8)
$$\left\{ \begin{aligned} \tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} + \tau_{xz0} + O(\sqrt{r}) \\ \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} + O(\sqrt{r}) \\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (23.11)$$

(23.9)
$$\left\{ \begin{aligned} w &= \frac{2(1+\nu)K_{III}}{\pi E} \sqrt{2\pi r} \sin\frac{\theta}{2} + O(r^{3/2}) \\ u = v &= 0 \end{aligned} \right. \quad (23.12)$$

23.4.2 K_I , K_{II} och K_{III} för lång spricka i helrymd

Ett intressant resultat är spännintensitetsfaktorer för en spricka av längd $2a$ i en oändlig solid utsatt för ett homogent avlagset spänningstillstånd $(\sigma_{ij})_\infty$



Figur 23.4 Spännintensitetsfaktorer för spricka i helrymd

23.4.3 Bestämning av spänningsintensitetsfaktorer för aktuellt randvärdesproblem

Spänningsintensitetsfaktorer kan bestämmas genom

1. analytisk lösning av styrande differentialekvationer med randvillkor
2. handbokslösningar, se t.ex. tabellen i slutet av kapitlet eller handböcker ([1]-[3])
3. numeriska metoder som finita elementmetod och randelementmetod
4. energiöverväganden i vissa fall
5. superposition t.ex. enligt (23.13) nedan.

För en plan kropp under modus I-förhållanden som begränsas av randkurvan $C = C_u + C_T$ och innehåller en spricka av längden a kan K_I bestämmas ur (23.13).

$$K_I(a) = \int_{C_T} \bar{s}_i g_i^T(a) dC + \int_{C_u} (\bar{u}_i - u_i^T) g_i^u(a) dC \quad (23.13)$$

där \bar{s}_i är den på C_T föreskrivna spänningsvektorn, \bar{u}_i de på C_u föreskrivna förskjutningarna, u_i^T är förskjutningarna på C_u på grund av spänningsvektorn på C_T och g_i^T och g_i^u är viktsfunktioner som kan bestämmas t.ex. med hjälp av beräkning med numerisk metod för aktuell geometri eller ur (23.14)-(23.15). Se också [4] och [5].

$$g_i^T(a) = \frac{E'}{2K_I^{ref}(a)} \frac{\partial u_i^{ref}}{\partial a} \quad (23.14)$$

$$g_i^u(a) = -n_j \frac{E'}{2K_I^{ref}(a)} \frac{\partial \sigma_{ij}^{ref}}{\partial a} \quad (23.15)$$

K_I^{ref} , u_i^{ref} och σ_{ij}^{ref} är lösningen till ett godtyckligt modus I belastat problem för den aktuella geometrin. Då sprickan har mer än en sprickspets skall deriveringen i (23.14)-(23.15) utföras så att de ej betraktade sprickspetsarna antas stationära. Vidare är n_j normalvektor till randen C_u och

$$E' = \begin{cases} E & \text{plant spänningstillstånd} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{plant deformationstillstånd} \end{cases} \quad (23.16)$$

Ekvation (23.13)-(23.16) kan också användas för modus II problem med K_I^{ref} utbytt mot K_{II}^{ref} . För modus III bytes faktorn $E'/2$ mot skjuvmodulen G och K_I^{ref} mot K_{III}^{ref} .

Det gäller speciellt för en skiva med en inre spricka med längden $2a$ som är mycket mindre än skivans dimensioner och med sprickytorna symmetriskt belastade med avseende på $y=0$ med den utbredda lasten $p_y(x)$ att

Formelsamling i hållfasthetslära

Figur 23.5 Defi

$$K_I = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \dots \\ \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^0 \dots \end{cases}$$

För sprickyteförskj

$$v(x, 0) = \frac{2}{\pi E'}$$

Speciellt gäller

$$v(x, 0) = \frac{4}{\pi E'}$$

Om $p_y = \sigma_\infty$ erhåll

$$\begin{cases} K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \\ v(x, 0) = \frac{2\sigma}{E} \end{cases}$$

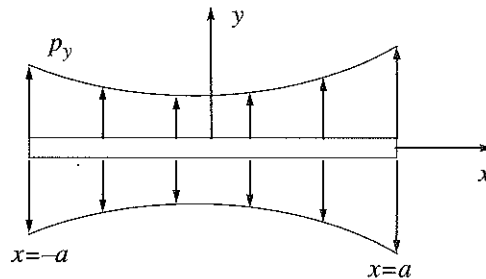
23.4.4 Energif

Den energi som tillfö

görelse G

$$G = \frac{1}{t} \frac{\partial U}{\partial a}$$

där U är potentiella en



Figur 23.5 Definition av storheter i (23.17)

$$K_I = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a p_y(x) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx & \text{för den högra spetsen} \\ \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a p_y(x) \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx & \text{för den vänstra spetsen} \end{cases} \quad (23.17)$$

För sprickyteförskjutningen gäller för detta fall att

$$v(x, 0) = \frac{2}{\pi E'} \int_x^a \frac{1}{t+a} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \left(\int_{-a}^t p_y(s) \sqrt{\frac{s+a}{t-s}} ds \right) dt \quad (23.18)$$

Speciellt gäller om $p_y(x)$ är **symmetrisk** i x (map. $x=0$) att

$$v(x, 0) = \frac{4}{\pi E'} \int_{|x|}^a \frac{t}{\sqrt{t^2-x^2}} \left(\int_0^t \frac{p_y(s)}{\sqrt{t^2-s^2}} ds \right) dt \quad (23.19)$$

Om $p_y = \sigma_\infty$ erhålls

$$\begin{cases} K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \\ v(x, 0) = \frac{2\sigma_\infty}{E'} \sqrt{a^2-x^2} \end{cases} \quad (23.20)$$

23.4.4 Energifrigörelse

Den energi som tillförs en sprickspets när en spricka tillväxer kan beskrivas av *energifrigörelse* \mathcal{G}

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{t} \frac{\partial U}{\partial a} \quad (23.21)$$

där U är potentiella energin i systemet och t är tjockleken.

I system där belastningens amplitud ges av en parameter gäller för kompliansen C enligt

$$\Delta_{gen} = CP_{gen} \quad (23.22)$$

där Δ_{gen} och P_{gen} är generaliserad förskjutning respektive kraft, följande samband:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2nt} P_{gen}^2 \frac{\partial C}{\partial a} = \frac{1}{2nt} \frac{\Delta_{gen}^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial a} \quad (23.23)$$

där $n=1$ för kantspricka och $n=2$ för inre spricka med symmetriska förhållanden. Ekvation (23.23) kan användas för att bestämma \mathcal{G} då $C(a)$ är känd eller vice versa.

\mathcal{G} vid spricktillväxt i sprickyntans tangenstriktning kan relateras till spänningsintensitetsfaktorena:

$$\mathcal{G} = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{(1+\nu)K_{III}^2}{E} \quad (23.24)$$

23.4.5 Brottvillkor

23.4.5.1 SPRICKTILLVÄXTVILLKOR

I den linjära brottmekaniken antas att spricktillväxt sker om

$$K_I \geq K_{Ic} \quad (23.25)$$

Här är K_{Ic} materialets brottseghet. K_{Ic} -värden för några olika material framgår av tabell 34.6. Metoder att mäta K_{Ic} framgår av avsnitt 23.8 **Brottmekanisk provning**.

23.4.5.2 GILTIGHETSVILLKOR FÖR LINJÄR BROTTMEKANIK, ASTM-VILLKORET

Som en tumregel för när linjär brottmekanik kan användas, utnyttjas ofta ett villkor enligt ASTM (*American Society for Testing and Materials*)

$$l > 2,5 \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (23.26)$$

Här är l minsta karakteristiska dimension hos kroppen (exempelvis tjocklek, spricklängd eller ligament dvs avstånd mellan sprickspets och rand).

23.4.6 J-integralen vid elastiskt material

För linjärt elastiskt material gäller (23.3) och således är för linjärt elastiskt material $J = \mathcal{G}$.

23.5 OLINJÄR

Inom den olinjära utredda. Här pres den. Genomgåend

23.5.1 J-integralen

J -integralen enligt töjningsenergifunktion. För många proble

$$\sigma_{ij} = \Psi \sigma_{ij}^0(x)$$

Här är Ψ en funktion. loppet. Då (23.27) är vägoberoende.

För sådana fall elastiska material

$$\bar{U} = \begin{cases} \Delta_{gen}(P_{gen}) \\ \int_0^{\Delta_{gen}} P_{gen} d\Delta_{gen} \\ 0 \end{cases}$$

En alternativ defin

$$J = \frac{1}{t} \frac{\partial \bar{U}}{\partial a}$$

I vilken utsträckning belastning. När omfattande med god approxin

$$J = \mathcal{G} + \frac{\eta}{tc} \int_0^{\Delta_{p,s}} P_{gen} d\Delta_{gen}$$

Här är \mathcal{G} det elastiska stånd, c ligamentet. ende faktor η som idealplastiska mater

$$J = \frac{\eta}{tc} P_{gen} \Delta_{gen}$$

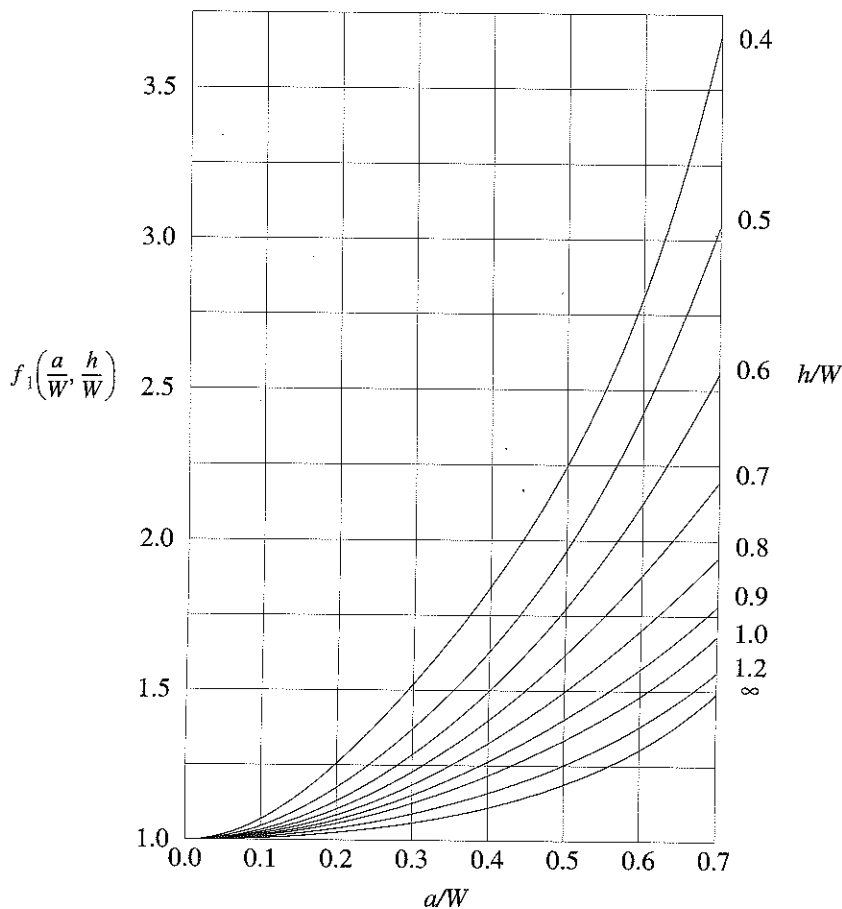
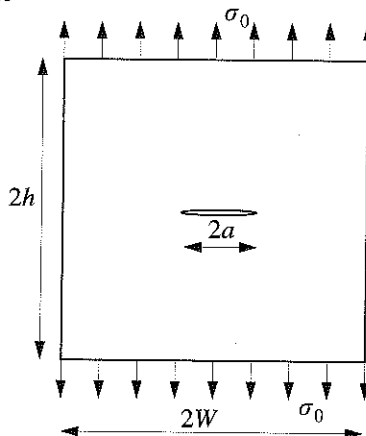
Central spricka i strimla med föreskriven randlast

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} f_1\left(\frac{a}{W}, \frac{h}{W}\right)$$

För $h = \infty$ gäller

$$f_1\left(\frac{a}{W}\right) = \left(\sec \frac{\pi a}{2W}\right)^{1/2} \left[1 - 0.025\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 0.06\left(\frac{a}{W}\right)^4\right]$$

M. ISIDA, *Int. J. Fract. Mech.* 7 (1971) p. 301



Geometrifunktion för fall 1.

Central spricka i st

Plan spänning

$$K_I = \frac{v_0 E}{\sqrt{h(1-v^2)}} f_2\left(\frac{a}{W}, \frac{h}{W}\right)$$

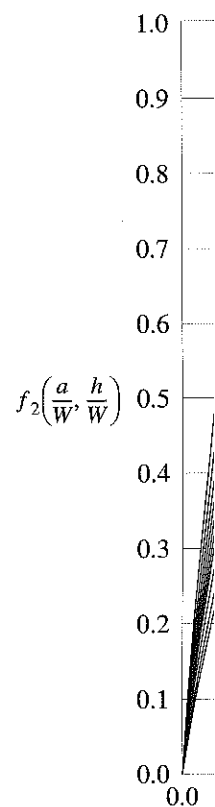
Plan deformation

$$K_I = \frac{v_0 E}{\sqrt{h(1+v)^2(1-v^2)}}$$

$g_2\left(\frac{a}{W}, \frac{h}{W}\right)$ är för när

Approximativt gäller

M. ISIDA, *Int. J. Frac*



Central spricka i strimla med föreskriven randförskjutning

Plan spänning

$$K_I = \frac{\nu_0 E}{\sqrt{h(1-\nu^2)}} f_2\left(\frac{a}{W}, \frac{h}{W}\right)$$

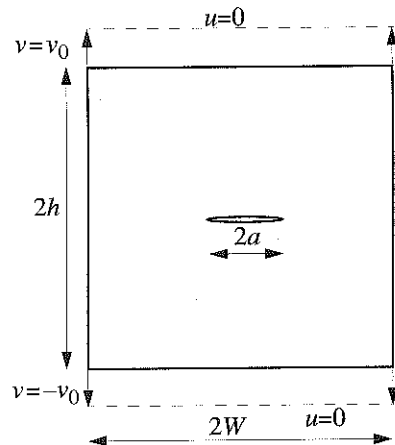
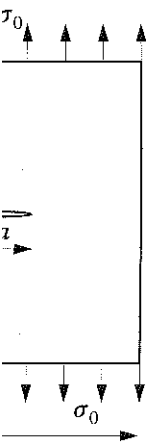
Plan deformation

$$K_I = \frac{\nu_0 E}{\sqrt{h(1+\nu)^2(1-2\nu)}} g_2\left(\frac{a}{W}, \frac{h}{W}\right)$$

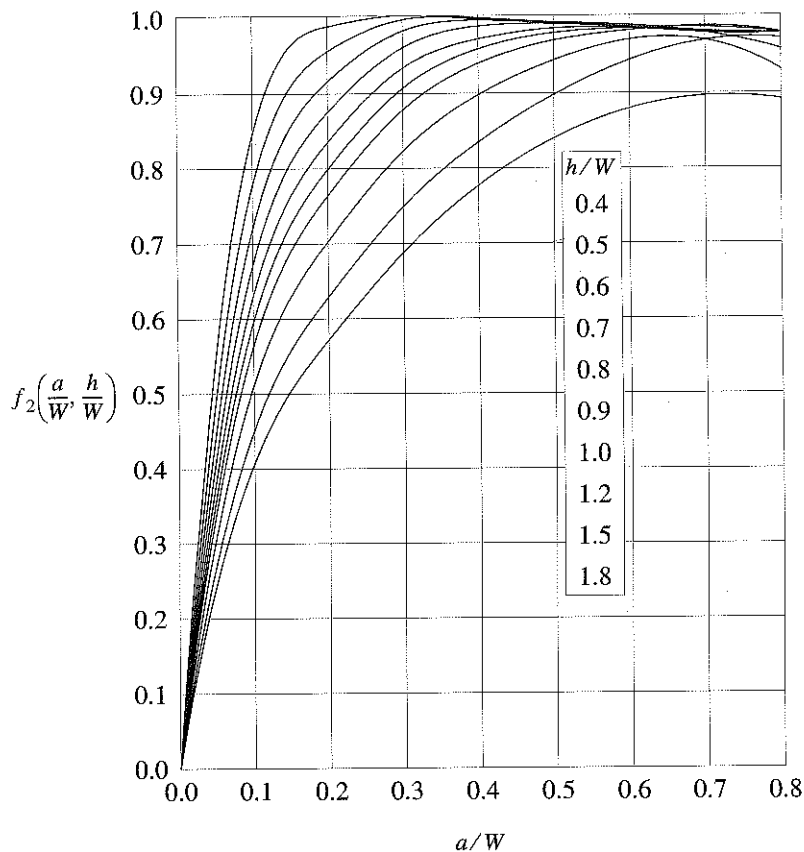
$g_2\left(\frac{a}{W}, \frac{h}{W}\right)$ är för närvarande ej beräknad.

Approximativt gäller $g_2\left(\frac{a}{W}, \frac{h}{W}\right) \approx f_2\left(\frac{a}{W}, \frac{h}{W}\right)$

M. ISIDA, *Int. J. Fract. Mech.* 7 (1971) p. 301



4
5
6
7
8
9
0
2
°



Geometrifunktion för fall 2.

Sprickor utgående från cirkulärt hål i oändlig skiva

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} f_3(s)$$

$$f_3(s) = 0,5(3-s)[1 + 1,243(1-s)^3]; 0 < s < 1$$

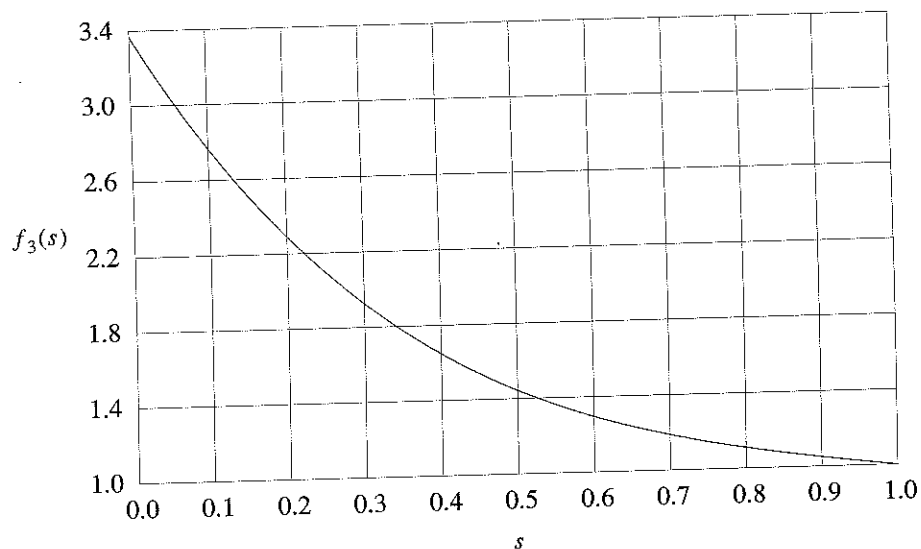
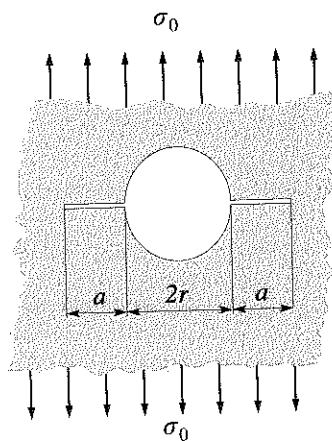
$$s = \frac{a}{r+a}$$

O.L. BOWIE, *J. Math. and Phys.* 35 (1956)

H. TADA, P.C. PARIS, G. R. IRWIN,

The Stress Analysis of Cracks Handbook,

Del Research Corp, 1973



Geometrifunktion för fall 3.

Dubbla kantsprickor

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} f_4\left(\frac{a}{W}\right),$$

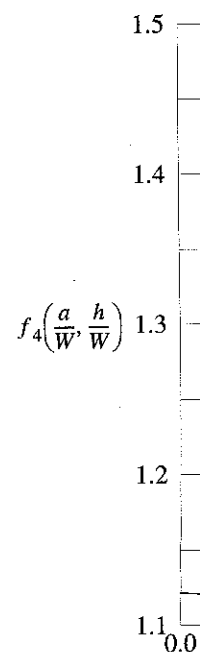
$$f_4\left(\frac{a}{W}\right) = \sum_{i=0}^6 \frac{a_i \left(\frac{a}{W}\right)^i}{\sqrt{1 - \frac{a}{W}}}$$

$$a_i = 1.1215, -0.5699, 2.4748, -3.1194,$$

X. Wu, A.J. Carlsson,

Weight Functions and

Pergamon Press, 1991



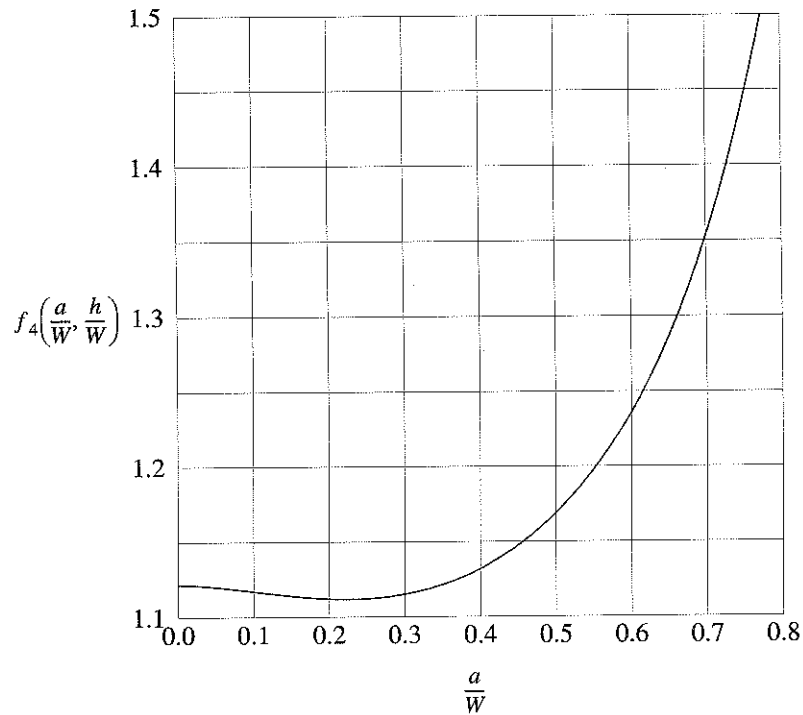
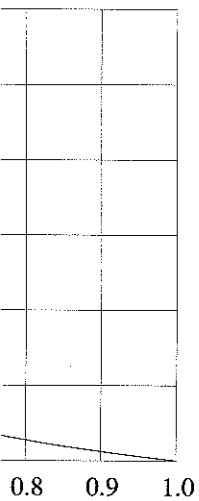
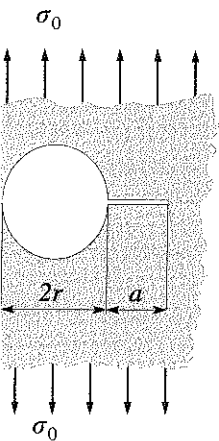
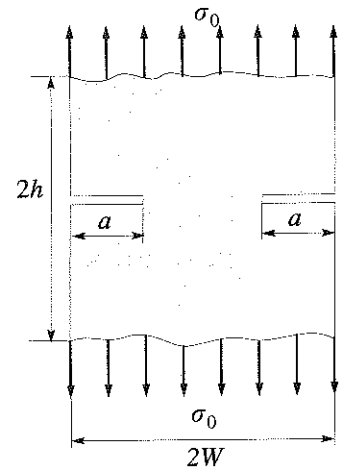
Dubbla kantsprickor i strimla med föreskriven randlast

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} f_4\left(\frac{a}{W}\right), \frac{h}{W} \geq 2$$

$$f_4\left(\frac{a}{W}\right) = \sum_{i=0}^6 \frac{a_i \left(\frac{a}{W}\right)^i}{\sqrt{1 - \frac{a}{W}}}$$

$$a_i = 1.1215, -0.5699, -0.7056, \\ 2.4748, -3.1194, 1.8945, -0.4594$$

X. Wu, A.J. Carlsson,
Weight Functions and Stress Intensity Factor Solutions,
 Pergamon Press, 1991



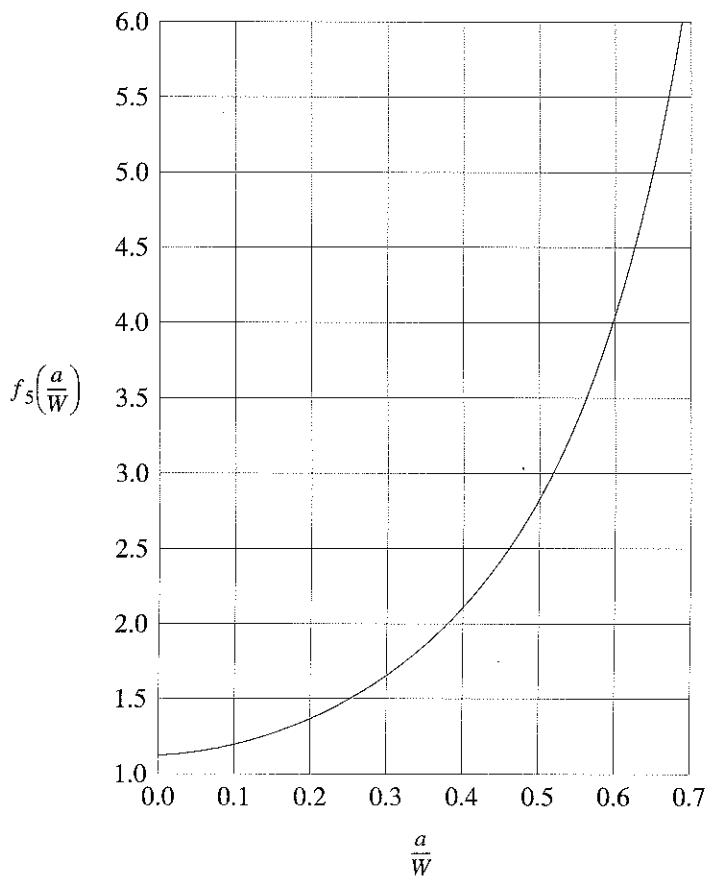
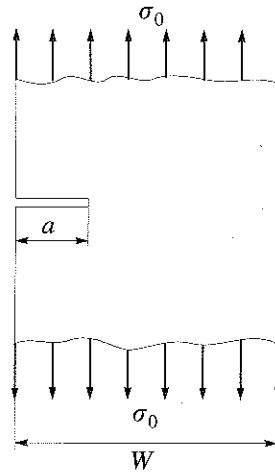
Geometrifunktion för fall 4.

Kantspricka i strimla utsatt för enaxlig dragning

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} f_5\left(\frac{a}{W}\right)$$

$$f_5\left(\frac{a}{W}\right) = \left(\frac{2W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2W}\right)^{1/2} \left(\cos \frac{\pi a}{2W}\right)^{-1} \left(0,752 + 2,02\left(\frac{a}{W}\right) + 0,37\left(1 - \sin \frac{\pi a}{2W}\right)^3\right)$$

H. TADA, P.C. PARIS, G. R. IRWIN,
The Stress Analysis of Cracks Handbook,
 Del Research Corp, 1973.



Geometrifunktion för fall 5.

Kantspricka i strimla

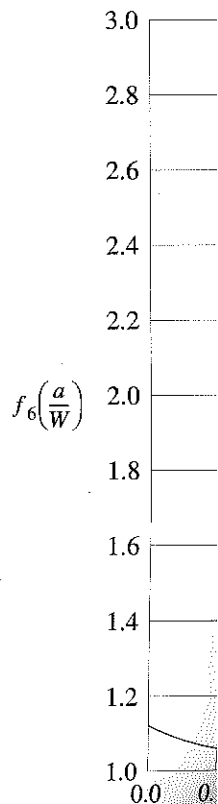
$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} f_6\left(\frac{a}{W}\right)$$

$$\sigma_0 = \frac{6M}{tW^2}$$

t = tjocklek

$$f_6\left(\frac{a}{W}\right) = \left(\frac{2W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2W}\right)^{1/2} \left(0,923 + 0,19\left(\frac{a}{W}\right)\right)$$

H. TADA, P.C. PARIS
The Stress Analysis of
 Del Research Corp, 1973.
 B. GROSS, J.E. SRAVA



Kantspricka i strimla utsatt för böjning

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} f_6\left(\frac{a}{W}\right)$$

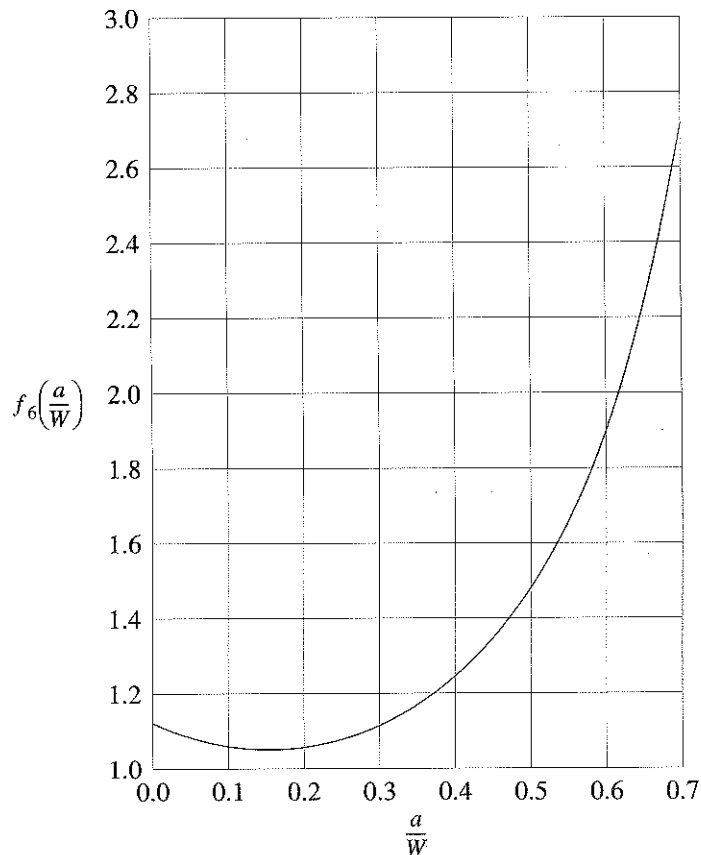
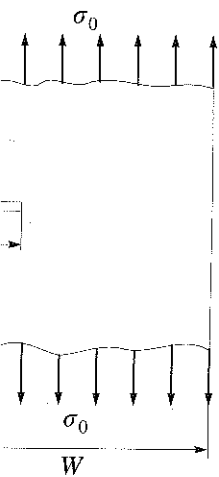
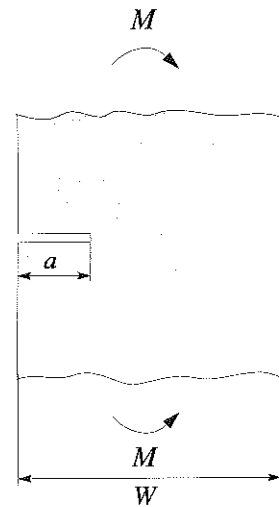
$$\sigma_0 = \frac{6M}{tW^2}$$

t = tjocklek

$$f_6\left(\frac{a}{W}\right) = \left(\frac{2W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2W}\right)^{1/2} \left(\cos \frac{\pi a}{2W}\right)^{-1} \left(0,923 + 0,199\left(1 - \sin \frac{\pi a}{2W}\right)^3\right)$$

H. TADA, P.C. PARIS, G. R. IRWIN
The Stress Analysis of Cracks Handbook,
 Del Research Corp, 1973

B. GROSS, J.E. SRAWLEY, NASA TN D-2603 (1965)



Geometrifunktion för fall 6.

Elliptisk ytspricka

$$K_{I\max} = \sigma_0 \sqrt{\pi a} f_7\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{t}\right)$$

$$f_7\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{t}\right) = Q^{-1/2} \left[M_1 + M_2 \left(\frac{a}{t}\right)^2 + M_3 \left(\frac{a}{t}\right)^4 \right]$$

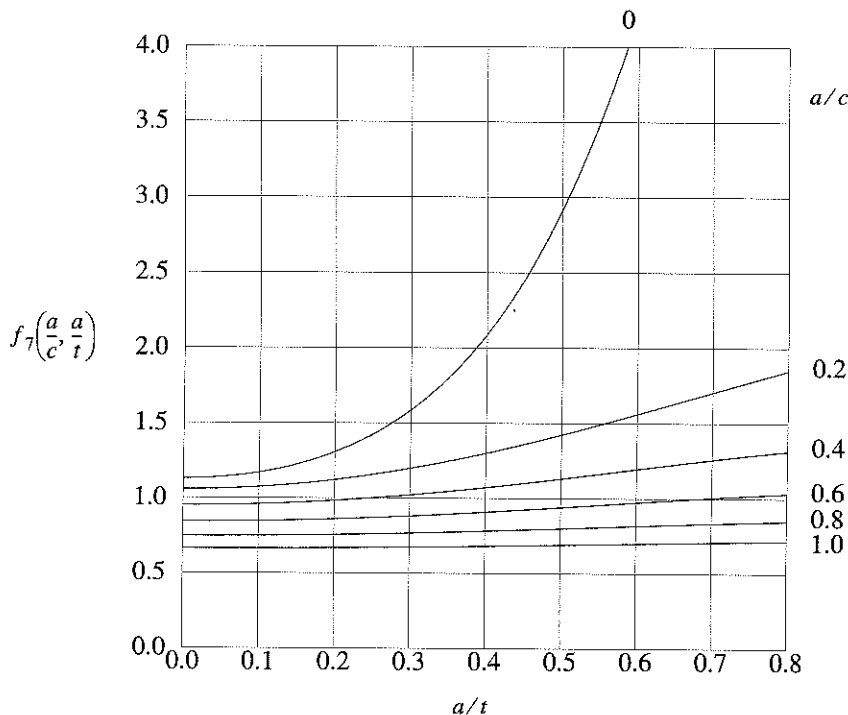
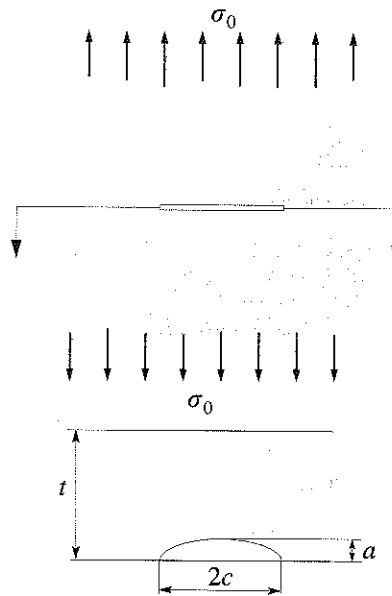
$$M_1 = 1,13 - 0,09 \left(\frac{a}{c}\right)$$

$$M_2 = -0,54 + 0,89 / (0,2 + a/c)$$

$$M_3 = 0,5 - 1,0 / (0,65 + a/c) + 14(1 - a/c)^{24}$$

$$Q = 1 + 1,464(a/c)^{1,65}$$

J.C. NEWMAN, Jr, I.S. RAJU,
Eng. Fracture Mech. (1981) p. 185



Geometrifunktion för fall 7.

Elliptisk inre spricka

$t \gg a$

$$K_{I\max} = \sigma_0 \sqrt{\pi a} f_8\left(\frac{a}{c}\right)$$

$$f_8\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{t}\right) = Q^{-1/2} \left[M_1 + M_2 \left(\frac{a}{c}\right)^2 + M_3 \left(\frac{a}{c}\right)^4 \right]$$

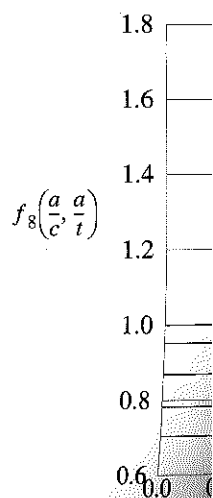
$$M_1 = 1$$

$$M_2 = 0,05 / (0,11 + a/c)$$

$$M_3 = 0,29 / (0,23 + a/c)$$

$$Q = 1 + 1,464(a/c)^{1,65}$$

J.C. NEWMAN, Jr, I.S. RAJU,
Eng. Fracture Mech. (1981) p. 185



Elliptisk inre spricka

$t \gg a$

$$K_{I\max} = \sigma_0 \sqrt{\pi a} f_8 \left(\frac{a}{c}, \frac{a}{t} \right)$$

$$f_8 \left(\frac{a}{c}, \frac{a}{t} \right) = Q^{-1/2} \left[M_1 + M_2 \left(\frac{a}{t} \right)^2 + M_3 \left(\frac{a}{t} \right)^4 \right]$$

$M_1 = 1$

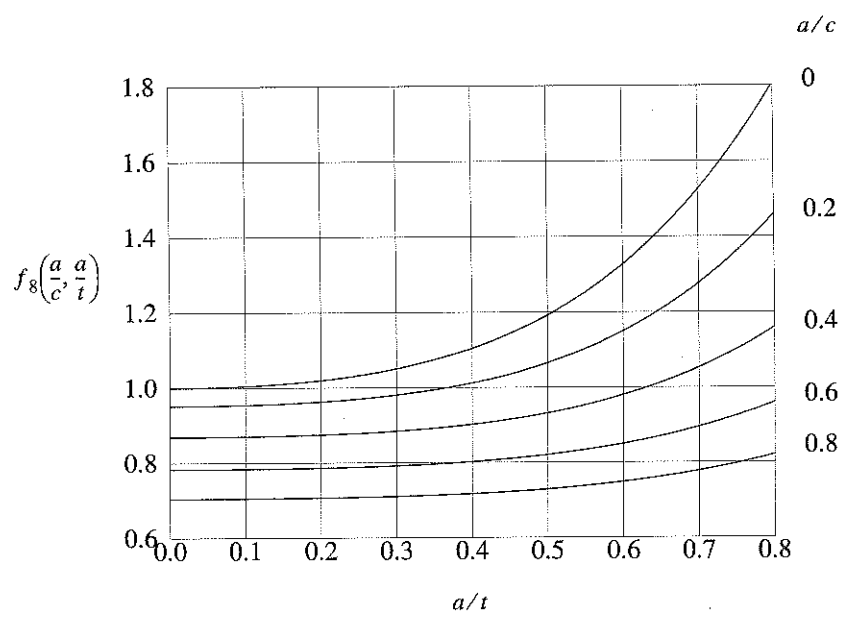
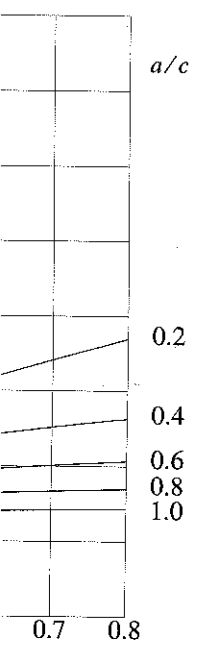
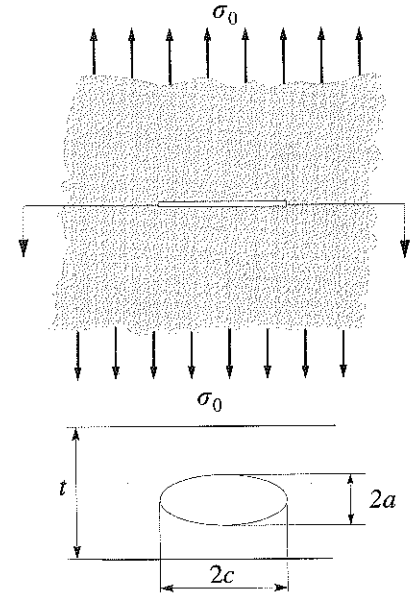
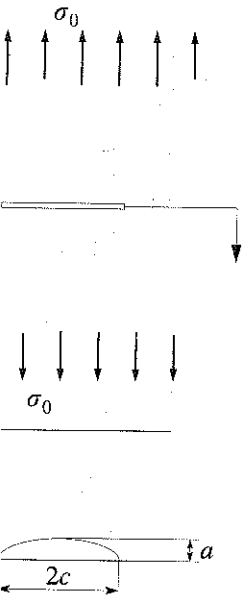
$M_2 = 0,05 / (0,11 + (a/c)^{3/2})$

$M_3 = 0,29 / (0,23 + (a/c)^{3/2})$

$Q = 1 + 1,464(a/c)^{1,65}$

J.C. NEWMAN, Jr, I.S. RAJU,

Eng. *Fracture Mech.* (1981) p. 185



Geometrifunktion för fall 8.

Anvisad cylindrisk stång.

$$\sigma_0 = \frac{4P}{\pi D^2}$$

$$a = (D - d)/2$$

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} f_9\left(\frac{a}{D}\right)$$

$$f_9\left(\frac{a}{D}\right) = \left(1 - \frac{2a}{D}\right)^{-3/2} \times$$

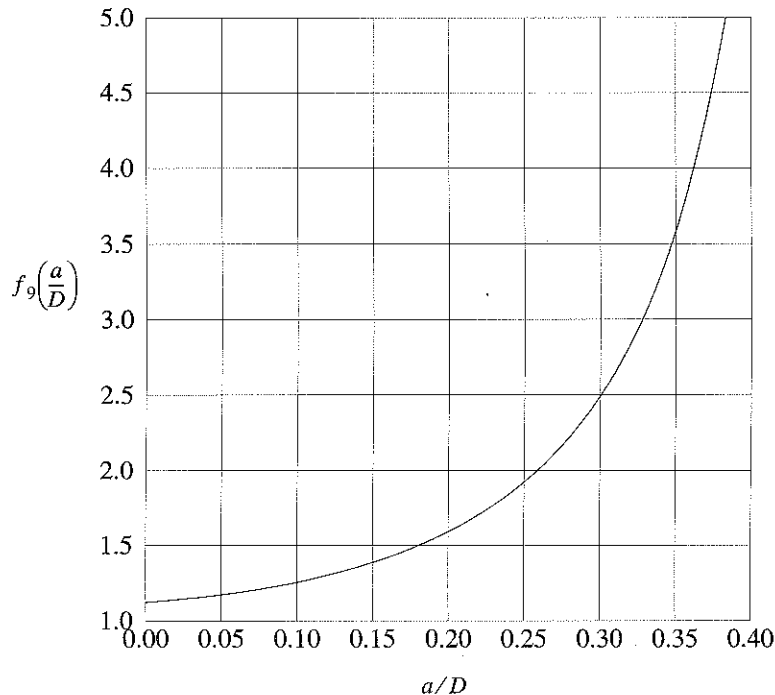
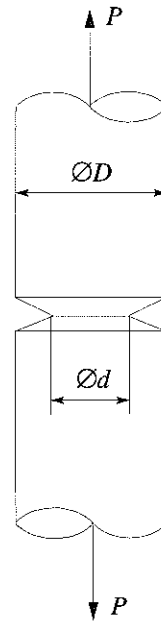
$$\times \left(1,122 - 1,302 \frac{2a}{D} + 0,988 \left(\frac{2a}{D}\right)^2 - 0,308 \left(\frac{2a}{D}\right)^3\right)$$

BUECKNER, ASTM STP 381 (1965)

J.P. BENTHEM, W.T. KOITER,

Chapter 3 in *Methods of Analysis*

of *Crack Problems*, Noordhoff, (1972)



Geometrifunktion för fall 9.

Compact tension (C

$$K_I = \frac{P}{tW^{1/2}} f_{10}\left(\frac{a}{W}\right)$$

$$f_{10}\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{\left(2 + \frac{a}{W}\right)}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{3/2}}$$

$$- 13,32 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 14,72$$

För standardprovstave
rekommenderas

$$t = W/2 \quad a = W/2$$

ASTM E 399,

American Society for

22

20

18

$f_{10}\left(\frac{a}{W}\right)$ 16

14

12

10

8

6

Compact tension (CT) provstav.

$$K_I = \frac{P}{tW^{1/2}} f_{10}\left(\frac{a}{W}\right)$$

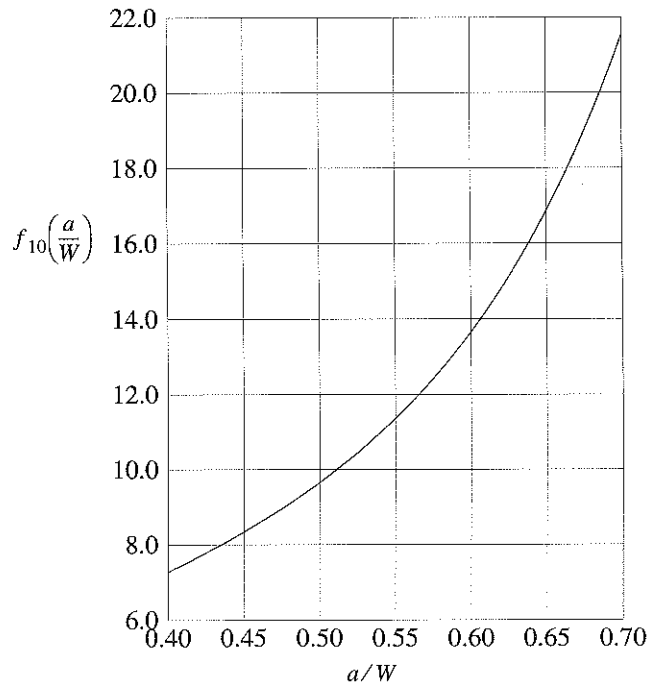
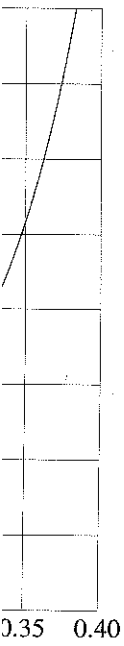
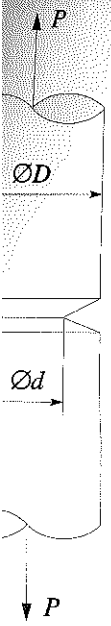
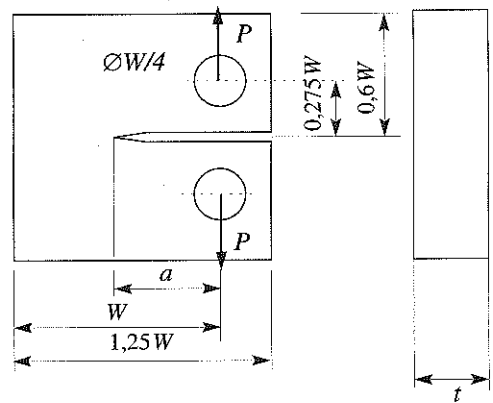
$$f_{10}\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{\left(2 + \frac{a}{W}\right)}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{3/2}} \left[0,886 + 4,64\left(\frac{a}{W}\right) - 13,32\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 14,72\left(\frac{a}{W}\right)^3 - 5,6\left(\frac{a}{W}\right)^4 \right]$$

För standardprovstaven rekommenderas

$$t = W/2 \quad a = W/2$$

ASTM E 399,

American Society for Testing and Materials



Geometrifunktion för fall 10.

Trepunkts böjprovstav (SEN(B))

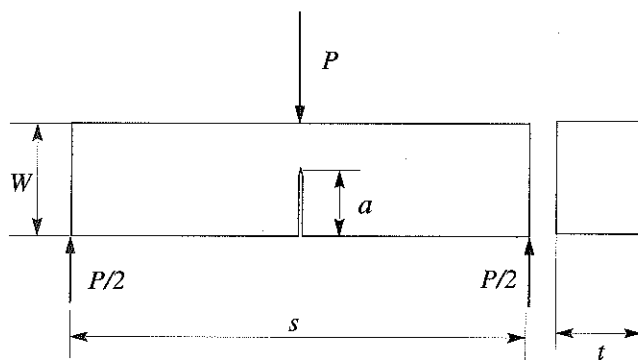
För standardprovstaven
rekommenderas

$$s = 4W$$

$$t = \frac{W}{2}$$

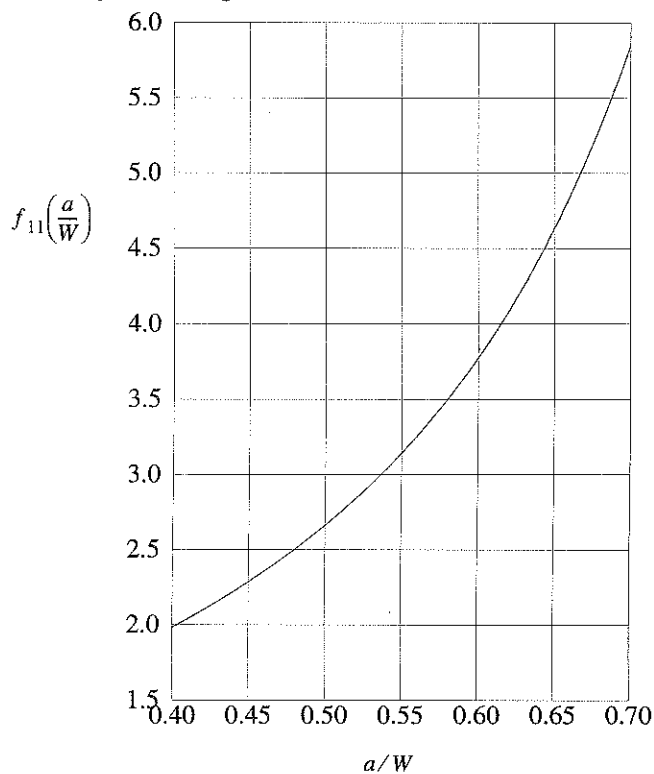
$$a = \frac{W}{2}$$

$$K_I = \frac{Ps}{tW^{3/2}} f_{11}\left(\frac{a}{W}\right)$$



$$f_{11}\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{3\left(\frac{a}{W}\right)^{1/2}}{2\left(1 + 2\frac{a}{W}\right)\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{3/2}} \left[1,99 - \left(\frac{a}{W}\right)\left(1 - \frac{a}{W}\right)\left(2,15 - 3,93\left(\frac{a}{W}\right) + 2,7\left(\frac{a}{W}\right)^2\right) \right]$$

ASTM E 399,
American Society for Testing and Materials



Geometrifunktion för fall 11.

Double cantilevered

$$a \gg h$$

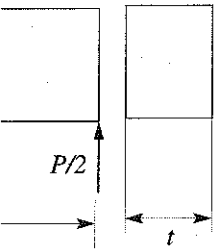
$$a \gg t$$

Kraften föreskriven:

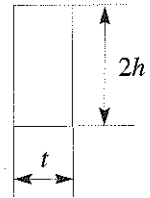
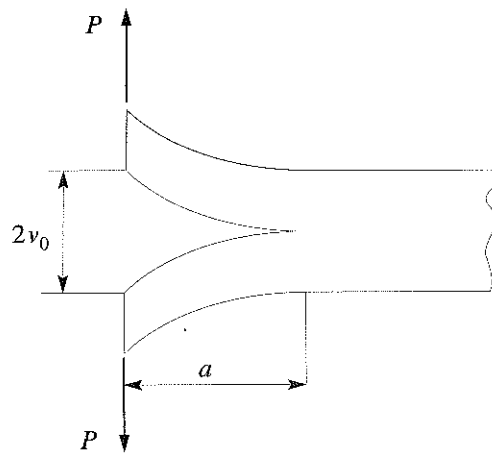
Förskjutningen föresk

Double cantilevered beam (DCB) provstav.

$a \gg h$
 $a \gg t$



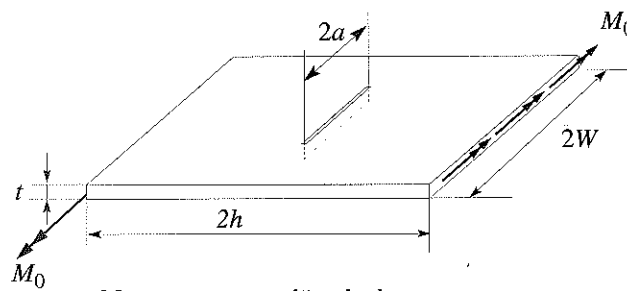
$$\left. \right) + 2,7 \left(\frac{a}{W} \right)^2 \right]$$



Kraften föreskriven:
$$K_I = \frac{2\sqrt{3}P(a)}{th^{1/2}\left(\frac{a}{h}\right)}$$

Förskjutningen föreskriven:
$$K_I = \frac{\sqrt{3}Ev_0(h)^2}{2h^{1/2}\left(\frac{a}{h}\right)}$$

Platta med central genomgående spricka.

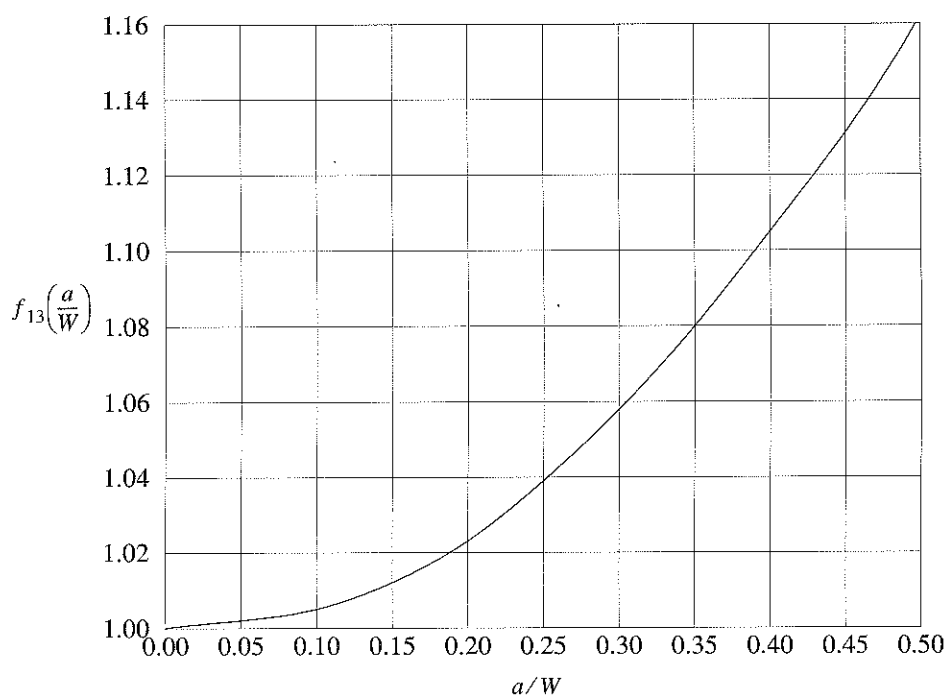


$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} f_{13}\left(\frac{a}{W}\right)$$

$$\sigma_0 = \frac{6M_0}{t^2}$$

M_0 = moment per längdenhet

W.K. WILSON, D.G. THOMPSON, *Int. J. Eng. Fract. Mech.* 3 (1971) p. 97



Geometrifunktion för fall 13.

Cylinder under inr

$$r \gg t \quad a \gg t \quad L \gg r$$

$$\sigma_0 = \frac{p_0 r}{t}$$

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} f_{14}(\lambda)$$

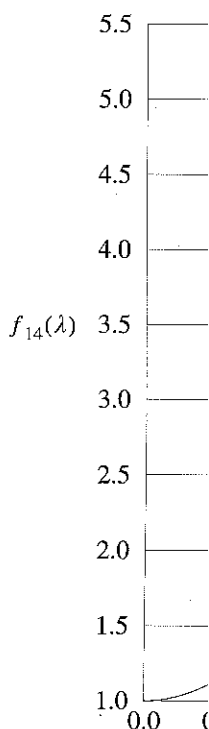
$$\text{där } \lambda = \frac{a}{(rt)^{1/2}}$$

$$f_{14}(\lambda) = \begin{cases} (1 + 1,25 \\ 0,6 + 0,9 \end{cases}$$

H. TADA, P.C. PAR

The Stress Analysis of

F. ERDOGAN, J. J.



Cylinder under inre övertryck med longitudinell genomgående spricka.

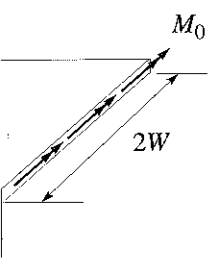
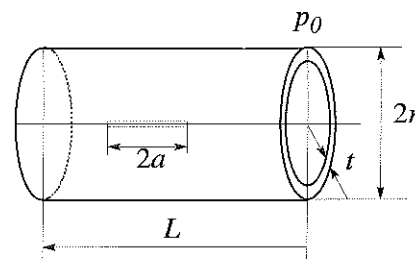
$r \gg t \quad a \gg t \quad L \gg r$

$\sigma_0 = \frac{p_0 r}{t}$

$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} f_{14}(\lambda)$

där $\lambda = \frac{a}{(rt)^{1/2}}$

$f_{14}(\lambda) = \begin{cases} (1 + 1,25\lambda^2)^{1/2} & 0 \leq \lambda \leq 1 \\ 0,6 + 0,9\lambda & 1 \leq \lambda \leq 5 \end{cases}$

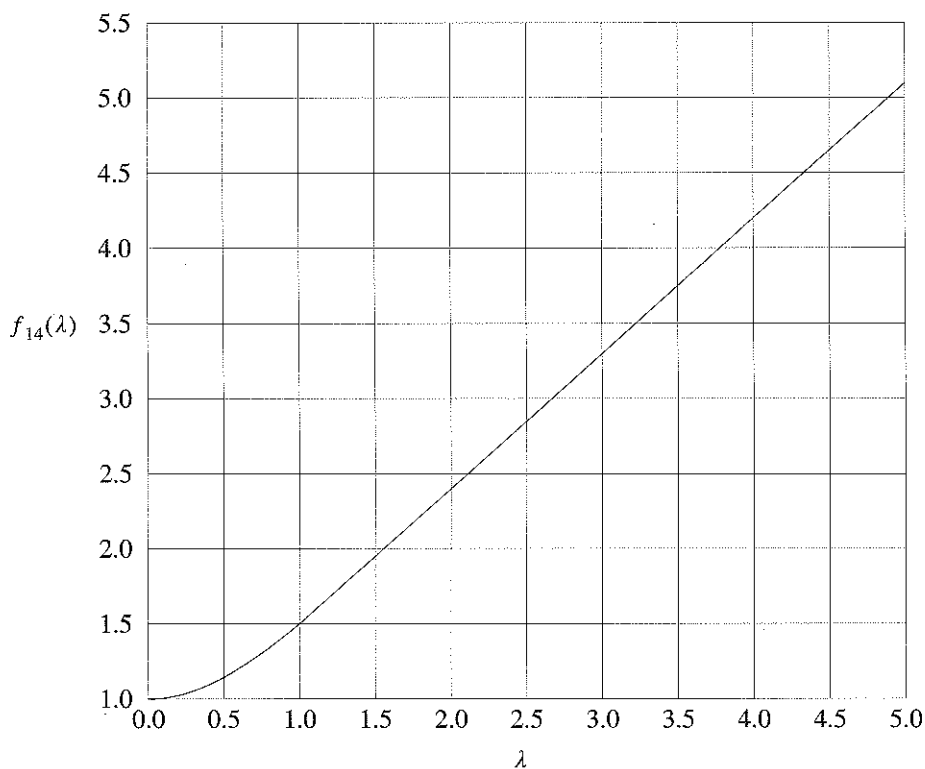
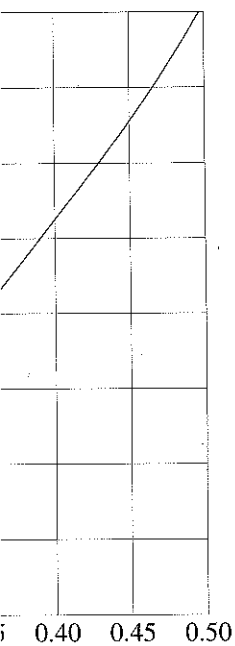


H. TADA, P.C. PARIS, G. R. IRWIN,

The Stress Analysis of Cracks Handbook, Del Research Corp, 1973

F. ERDOGAN, J. J. KIBLER, *Int. J. of Fract. Mech.* 5(1969) p. 229.

971) p. 97



Geometrifunktion för fall 14.

Sfär under inre övertryck med ekvatoriell genomgående spricka.

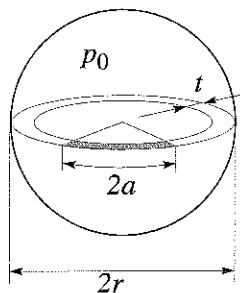
$r \gg t \quad a \gg t$

$\sigma_0 = \frac{p_0 r}{2t}$

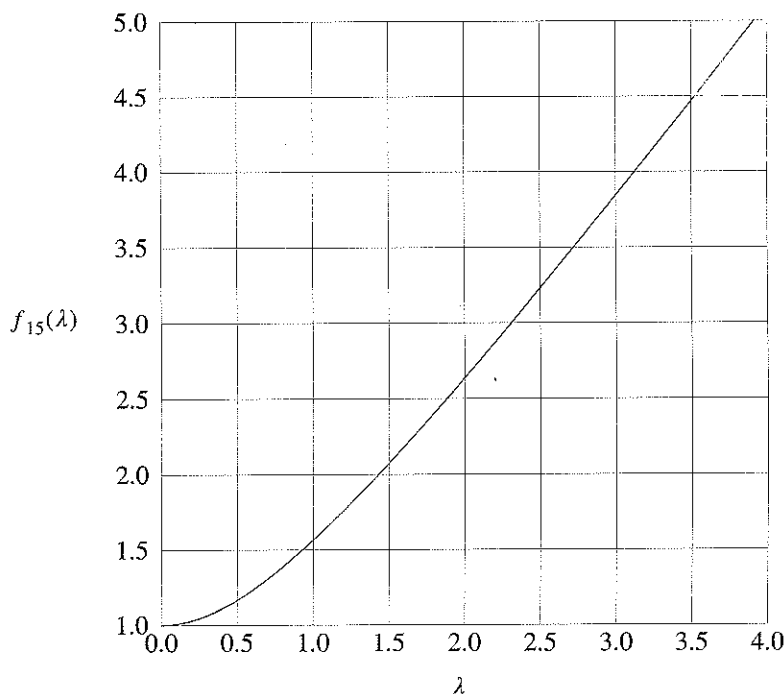
$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} f_{15}(\lambda)$

där $\lambda = \frac{a}{(rt)^{1/2}}$

$f_{15}(\lambda) = (1 + 1,41\lambda^2 + 0,04\lambda^3)^{1/2}$



H. TADA, P.C. PARIS, G. R. IRWIN,
The Stress Analysis of Cracks Handbook, Del Research Corp, 1973
 F. ERDOGAN, J. J. KIBLER, *Int. J. of Fract. Mech.* 5(1969) p. 229.



Geometrifunktion för fall 15.

KAP 24
 BROTTTEORI

24.1 INLEDNING

I detta kapitel behandlas brottmekaniken förutsätts va skadeparameter med ning.

24.2 STATISKT

24.2.1 Mohrs b

Mohrs brotteori svar från dragprov, σ_B och minsta (σ_3) huvuds

$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_B - \sigma_{Bt}} = 1$

Skjuvbrottspänni

$\tau_B = \frac{\sigma_B \sigma_{Bt}}{\sigma_B + \sigma_{Bt}}$

24.2.2 Segt bro

En analys av segt bro ger en maximal l $z = \sigma_e \cdot (d\varepsilon_e^p / d\sigma_e)$ material med konstit ten $z=1$ och speciellt

$\varepsilon_B = \frac{1}{n}$

Analysen är elem