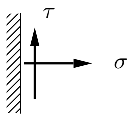
Formelsamling i Hållfasthetslära för F

Avd. för Hållfasthetslära
Lunds Universitet
Oktober 2017

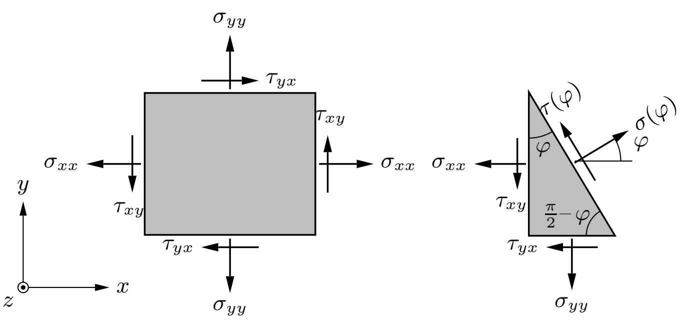
Spänningar



Normalspänning: σ = spänningskomponent vinkelrät mot snittyta
Skjuvspänning: τ = spänningskomponent tangentiellt till snittyta

zz

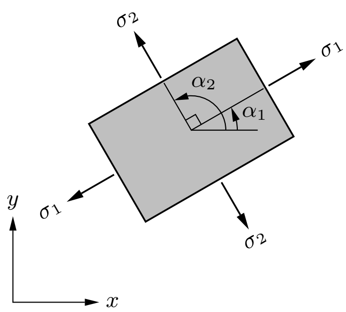
Spänningstillstånd i ett plan, vinkelrätt mot en huvudspänning



$$\sigma_\varphi = \sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi + 2\tau_{xy}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\tau_\varphi = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

Huvudspänningar och huvudspänningsriktningar



$$\left.\begin{array}{c}\sigma_1\\ \sigma_2\end{array}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan\alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

Maximala skjuvspänningen i planet är

$$(\tau_{\max})_{\text{planet}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Maximala skjuvspänningen är

$$\tau_{\max} = \max\left(\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2};\ \frac{|\sigma_1|}{2};\ \frac{|\sigma_2|}{2};\right)$$

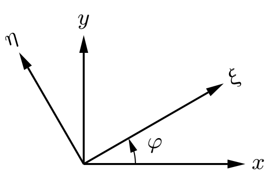
Töjningar

Normaltöjning: ε = relativ ländändring $= \dfrac{L - L_o}{L_o}$

där L_o=ursprunglig längd, L=ny längd

Skjuvtöjning: γ = minskning av ursprunglig rät vinkel (orsakad av deformation)

Deformationstillståndet i ett plan, vinkelrätt mot en huvudspänningsriktning

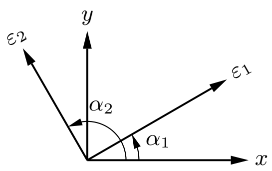


$$\varepsilon_\xi = \varepsilon_x \cos^2\varphi + \varepsilon_y \sin^2\varphi + \gamma_{xy}\sin\varphi\cos\varphi$$
$$\gamma_{\xi\eta} = (\varepsilon_y - \varepsilon_x)\sin 2\varphi + \gamma_{xy}\cos 2\varphi$$

där

- ε_x är töjningen av ett linjeelement i x-riktningen
- ε_y är töjningen av ett linjeelement i y-riktningen
- ε_ξ är töjningen av ett linjeelement i ξ-riktningen
- γ_{xy} är skjuvningen av axelkorset xy, dvs. minskningen av den räta vinkeln mellan x- och y-riktningen
- $\gamma_{\xi\eta}$ är skjuvningen av axelkorset $\xi\eta$, dvs. minskningen av den räta vinkeln mellan ξ- och η-riktningen

Huvudtöjningar och huvudtöjningsriktningar



$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{array}\right\} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\tan\alpha_1 = \frac{2(\varepsilon_1-\varepsilon_x)}{\gamma_{xy}}$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{2(\varepsilon_2-\varepsilon_x)}{\gamma_{xy}}$$

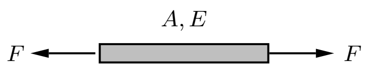
$$\varepsilon_1+\varepsilon_2 = \varepsilon_x+\varepsilon_y$$

Maximala skjuvningen i planet är

$$(\gamma_{\max})_{\text{planet}} = \varepsilon_1-\varepsilon_2$$

Samband mellan spänningar och töjningar

Enaxlig belastning



$$\sigma_x = \frac{F}{A} \qquad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x\,; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Termisk belastning

$$\varepsilon^T = \alpha\Delta T$$

Vridning

För en roterande axel gäller

$$M_v = \frac{P}{\omega}$$

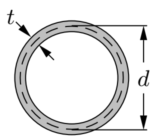
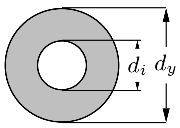
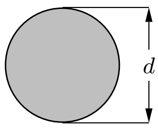
där M_v är vridmomentet i en axel som överför effekten P vid vinkelhastigheten ω

För maximal vridskjuvspänning $\tau_{v\max}$ gäller

$$\tau_{v\max} = \frac{M_v}{W_v} \qquad W_v \text{ är vridmotståndet (se tabell)}$$

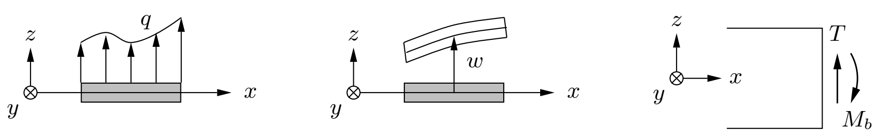
För förvridningsvinkel φ mellan axelns ändytor gäller

$$\varphi = \frac{M_v L}{GK} \qquad \begin{array}{l} L \text{ är axellängden} \\ K \text{ är vridstyvhetens tvärsnittsfaktor (se tabell)} \end{array}$$

	Tvärsnitt	W_v	K
Tunnväggigt cirkulärt slutet tvärsnitt med konstant väggtjocklek		$\dfrac{\pi d^2 t}{2}$	$\dfrac{\pi d^3 t}{4}$
Tjockväggigt cirkulärt slutet tvärsnitt		$\dfrac{\pi(d_y^4 - d_i^4)}{16 d_y}$	$\dfrac{\pi(d_y^4 - d_i^4)}{32}$
Massivt cirkulärt tvärsnitt		$\dfrac{\pi d^3}{16}$	$\dfrac{\pi d^4}{32}$

Balkböjning

Positiva definitioner på belastningsintensitet, tvärkraft och böjande moment.



För balkens totala belastning Q, positiv riktad uppåt, gäller

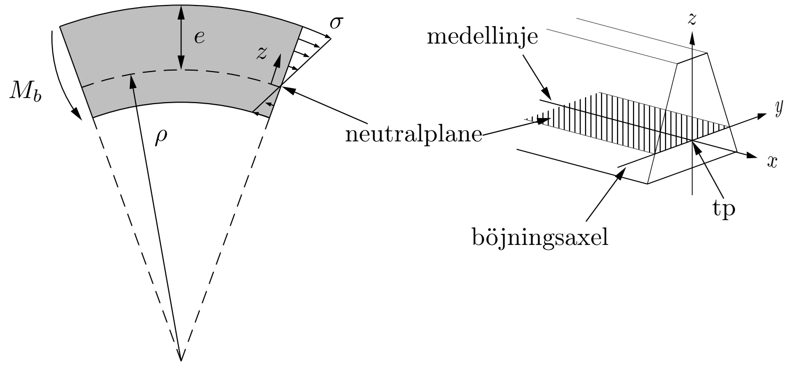
$$Q = \int_0^L q\,dx$$

Jämviktsdifferentialekvationerna för balken ges av

$$\frac{dT}{dx} = -q$$
$$\frac{dM_b}{dx} = T$$

Böjspänningar (ingen normalkraft)

Koordinatsystemet ligger sådant att x-axeln går genom tvärsnittets tyngd-



punkt.

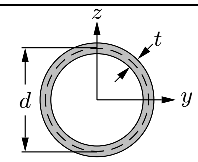
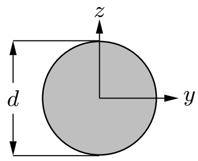
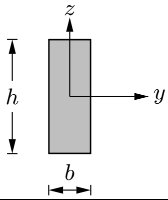
$$\sigma = E\frac{z}{\rho} \qquad \rho \text{ är neutralplanets krökningsradie.}$$
$$\sigma = \frac{M_b}{I_y}z \qquad I_y \text{ är yttröghetsmomentet kring } y\text{-axeln.}$$

För maximal böjspänning σ_b i ett snitt gäller

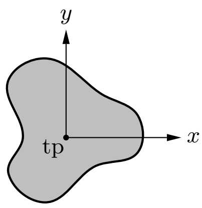
$$\sigma_b = \frac{|M_b|}{W_b} \qquad W_b \text{ är böjmotståndet}$$

För W_b gäller

$$W_b = \frac{I_y}{e} \qquad e = |z_{\max}| \text{ är största avståndet från neutralplanet till yttersta fibern}$$

	Tvärsnitt	I_y	W_b
Tunnväggigt cirkulärt slutet tvärsnitt med konstant väggtjocklek		$\dfrac{\pi d^3 t}{8}$	$\dfrac{\pi d^2 t}{4}$
Massivt cirkulärt tvärsnitt		$\dfrac{\pi d^4}{64}$	$\dfrac{\pi d^3}{32}$
Massivt rektangulärt tvärsnitt		$\dfrac{bh^3}{12}$	$\dfrac{bh^2}{6}$

Allmänt om yttröghetsmoment

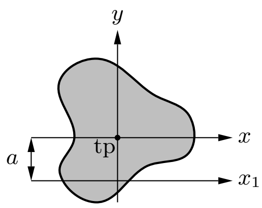


Yttröghetsmomentet kring x-axel $\quad I_x = \int y^2 dA$

Yttröghetsmomentet kring y-axel $\quad I_y = \int x^2 dA$

Deviationsmomentet kring axelkorset xy $\quad D_{xy} = \int xy dA$

Steiners sats



För yttrögetsmomentet I_{x_1} kring en axel parallel med en axel genom tyngdpunkten gäller

$$I_{x_1} = I_x + a^2 A$$

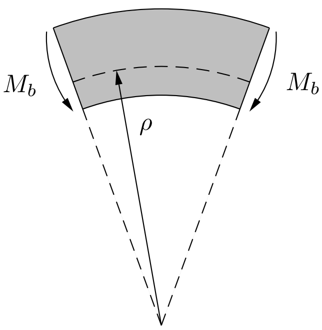
A är tvärsnittsarean

a är avståndet mellan axlarna.

För tröghetsradien i gäller

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Elastiska linjen



För neutralplanets krökningsradie gäller

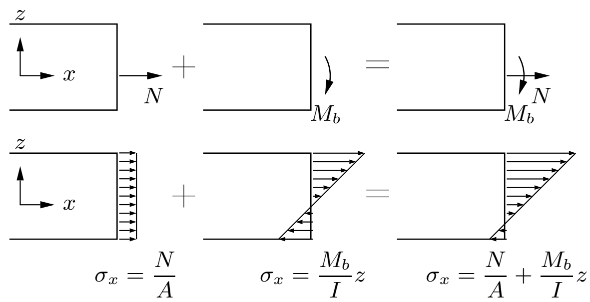
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_b}{EI}$$

där I är tvärsnittytans tröghetsmoment kring böjningsaxeln.

Elastiska linjens differentialekvation är

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} = -M_b$$

Sammansatt belastning

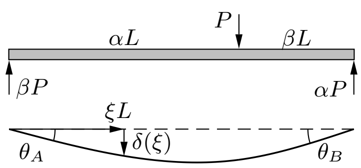


Balk utsatt för böjande moment och normalkraft

$$\sigma_x = \frac{M_b}{I_y}z + \frac{N}{A}$$

Elementarfall för fritt upplagd balk

1.1

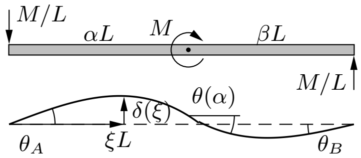


$$\theta_A = \frac{PL^2}{6EI}\alpha\beta(1+\beta) \qquad \theta_B = \frac{PL^2}{6EI}\alpha\beta(1+\alpha)$$

$$\delta(\xi) = \frac{PL^3}{6EI}\beta[(1-\beta^2)\xi - \xi^3] \quad \text{för} \quad \xi \le \alpha$$

$$\delta(\alpha) = \frac{PL^3}{3EI}\alpha^2\beta^2$$

1.2

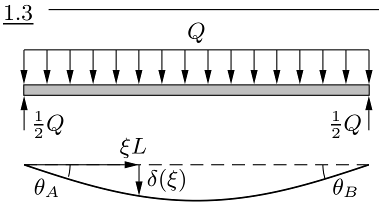


$$\theta_A = \frac{ML}{6EI}(1-3\beta^2) \qquad \theta_B = \frac{ML}{6EI}(1-3\alpha^2)$$

$$\delta(\xi) = \frac{ML^2}{6EI}[(1-3\beta^2)\xi - \xi^3] \quad \text{för} \quad \xi \le \alpha$$

$$\delta(\alpha) = \frac{ML^2}{3EI}\alpha\beta(\alpha-\beta) \qquad \theta(\alpha) = \frac{ML}{3EI}(1-3\alpha\beta)$$

1.3

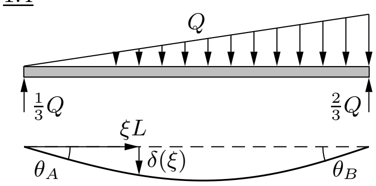


$$\theta_A = \theta_B = \frac{QL^2}{24EI}$$

$$\delta(\xi) = \frac{QL^3}{24EI}(\xi - 2\xi^3 + \xi^4)$$

$$\delta(\tfrac{1}{2}) = \frac{5QL^3}{384EI}$$

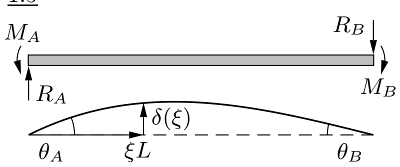
1.4



$$\theta_A = \frac{7QL^2}{180EI} \qquad \theta_B = \frac{8QL^2}{180EI}$$

$$\delta(\xi) = \frac{QL^3}{180EI}(7\xi - 10\xi^3 + 3\xi^5)$$

1.5



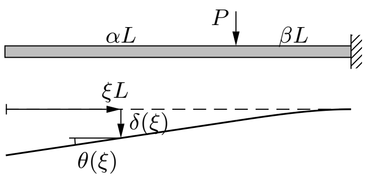
$$R_A = R_B = \frac{M_A - M_B}{L}$$

$$\theta_A = \frac{M_A L}{3EI} + \frac{M_B L}{6EI} \qquad \theta_B = \frac{M_A L}{6EI} + \frac{M_B L}{3EI}$$

$$\delta(\xi) = \frac{L^2}{6EI}[M_A(2\xi - 3\xi^2 + \xi^3) + M_B(\xi - \xi^3)]$$

Elementarfall för konsolbalk

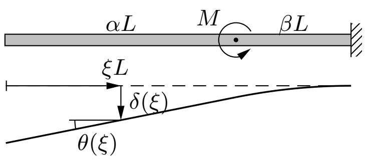
2.1



$$\delta(\xi) = \frac{PL^3}{6EI} \cdot \begin{cases} [-\beta^3 + 3\beta^2(1-\xi)] & \xi \leq \alpha \\ [(\xi-\alpha)^3 - 3\beta^2(\xi-\alpha) + 2\beta^3] & \xi > \alpha \end{cases}$$

$$\theta(\xi) = \frac{PL^2}{2EI} \cdot \begin{cases} \beta^2 & \xi \leq \alpha \\ [\beta^2 - (\xi-\alpha)^2] & \xi > \alpha \end{cases}$$

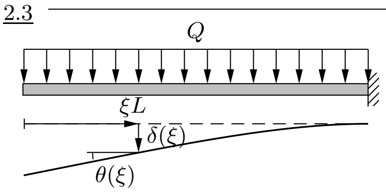
2.2



$$\delta(\xi) = \frac{ML^2}{2EI} \cdot \begin{cases} 2\beta(1-\xi-\tfrac{1}{2}\beta)] & \xi \leq \alpha \\ [(\xi-\alpha)^2 - 2\beta(\xi-\alpha) + \beta^2] & \xi > \alpha \end{cases}$$

$$\theta(\xi) = \frac{ML}{EI} \cdot \begin{cases} \beta & \xi \leq \alpha \\ (1-\xi) & \xi > \alpha \end{cases}$$

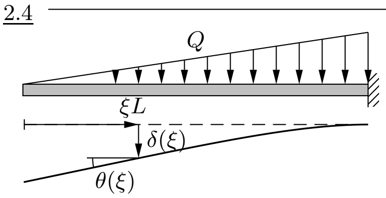
2.3



$$\delta(\xi) = \frac{QL^3}{24EI}(\xi^4 - 4\xi + 3)$$

$$\theta(\xi) = \frac{QL^2}{6EI}(1 - \xi^3)$$

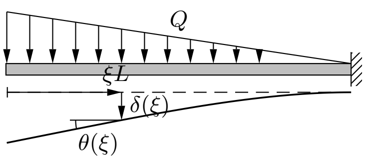
2.4



$$\delta(\xi) = \frac{QL^3}{60EI}(\xi^5 - 5\xi + 4)$$

$$\theta(\xi) = \frac{QL^2}{12EI}(1 - \xi^4)$$

2.5



$$\delta(\xi) = \frac{QL^3}{60EI}(-\xi^5 + 5\xi^4 - 15\xi + 11)$$

$$\theta(\xi) = \frac{QL^2}{12EI}(\xi^4 - 4\xi^3 + 3)$$

Materialtabeller

Material	E[GPa]	$\nu\,[-]$	ρ[kg/m^3]
stål	210[1]	0.3	7800
höglegerat	206	0.3	7880
rostfritt	220	0.3	7710
aluminium	70	0.34	2700
duraluminium	72	0.32	2800
koppar	120	0.35	8900
volfram	360	0.17	19300
magnesium	45	0.33	1730

Stålkvalitéer	E[GPa]	$\nu\,[-]$	[2]σ_s[MPa]
SS1550-01	205	0.3	260
SS2090-04	206	0.3	1300
SS2172-00	205	0.3	310
SS2331-43	206	0.3	980

[1]Elasticitetsmodulen för stål varierar mellan 180 och 240 GPa[2].

[2]Variationer beroende på materialets volym förekommer.