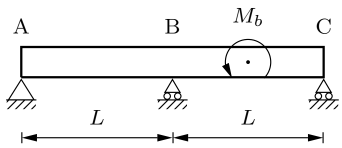
Tentamen i hållfasthetslära FHLA10 (FHL105), 2018-01-11 kl. 14-19

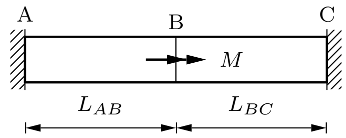
Tentamen omfattar 5 problem vilka bedöms i hela poäng, 0-6 poäng per uppgift. Summa 15-19 ger betyget 3, 20-24 ger betyget 4 och 25-30 poäng ger betyget 5. Tillåtna hjälpmedel är räknedosa och formelblad från kursens hemsida.

Alla lösningar skall vara välstrukturerade, lätta att följa, väl motiverade och ett tydligt svar skall anges till varje uppgift.

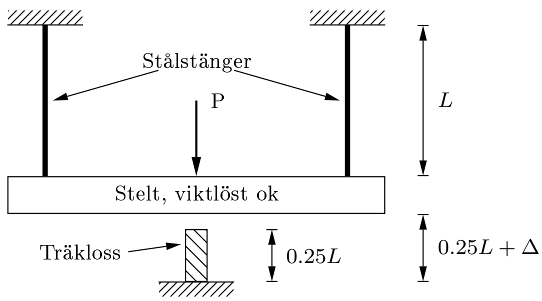
1. En balk med längden $2L$ är fritt upplagd på tre stöd enligt figuren. Beräkna utböjningen mitt på balkdelen AB på grund av det moturs böjande momentet M_b som angriper mitt på balkdelen BC. Balkens böjstyvhet är EI och dess egenvikt kan försummas.



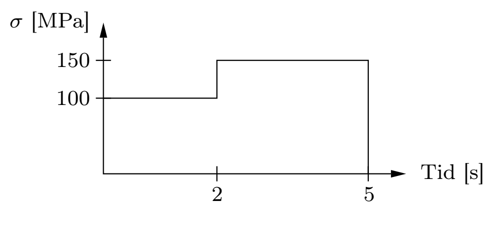
2. En solid axel med konstant cirkulärt tvärsnitt är spänningsfritt infäst mellan två stela väggar och belastas med ett vridande moment M vilket angriper i punkten B. Axeln är tillverkad av en stålsektion AB och en aluminiumsektion BC vilka är sammanfogade på ett sådant sätt att glidning ej uppstår mellan sektionerna vid belastning. Axelns diameter är $d_{AB} = d_{BC} = 150$ mm och stålsektionen har längden $L_{AB} = 1.2$ m. Bestäm längden av aluminiumsektionen BC så att spänningen är lika stor i båda sektionerna. Bestäm även den maximala skjuvspänningen som uppkommer, samt förvridningen vid punkten B då det pålagda momentet är $M = 20$ kNm. För stålet gäller $G_{stål} = 80$ GPa och för aluminiumet $G_{Al} = 26$ GPa.



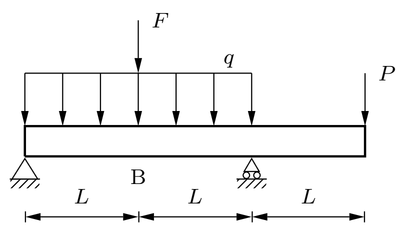
3. Ett stelt, viktlöst ok är symmetriskt upphängt i två stålstänger med cirkulärt tvärsnitt, diametern $d = 10$ mm och längden $L = 1$ m. Mitt på oket angriper en kraft P. Under kraftens angreppspunkt står en träkloss med kvadratiskt tvärsnitt som stöd för oket. Vid tillverkningen gjordes träklossen aningen för kort vilket i obelastat tillstånd ger upphov till ett passningsfel mellan oket och klossen. Bestäm det maximala värdet på kraften P så att absolutbeloppet av spänningen i stängerna och träklossen inte överstiger 170 MPa respektive 10 MPa då passningsfelet är $\Delta = 0.15$ mm. Såväl träet som stålet kan antas bete sig linjärt elastiskt med elsticitetsmodulerna $E_{trä} = 10$ GPa och $E_{stål} = 207$ GPa. Träklossens tvärsnitt har sidlängden 50 mm.



4. Ett visst material kan beskrivas med en Maxwell-modell med elasticitetsmodulen $E = 12$ GPa och viskositetsmodulen $\eta = 5$ GPa·s. Materialet utsätts under 5 s för en belastning som varierar enligt figuren och därefter sker avlastning. Beräkna den största töjninge under belastningen.
Ledning: En elastisk fjäder beskrivs av $\sigma = E\varepsilon$ och en viskös dämpare beskrivs av $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$.



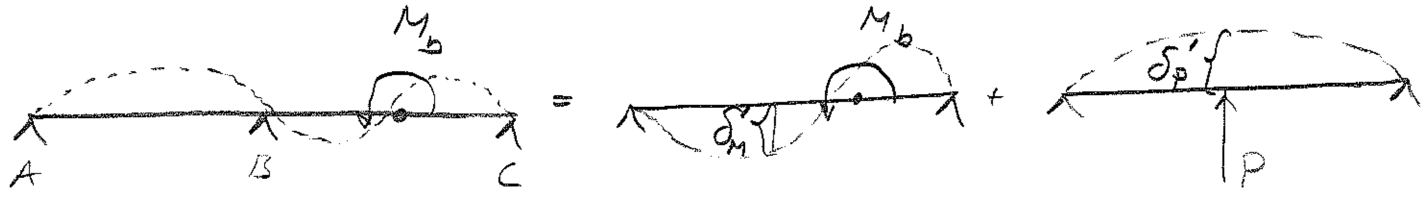
5. En balk med längden $3L = 6$ m är upplagd på två stöd och belastas med två punktkrafter, P och $F = 13$ kN, samt en jämnt utbredd belastning med lastintensiteten $q = 12$ kN/m enligt figuren. Bestäm kraften P så att det resulterande böjmomentet i punken B är noll. Bestäm även tvärkraften i balken precis till höger om punkten B.



Tenta 2018-01-11

1) Ersätt stödet i mitten med en punktkraft vilken bestäms ur deformationsvillkoret att utböjningen vid stödet är noll.

$\beta = \frac{1}{4},\ \xi = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\xi = \alpha = \beta = \frac{1}{2}$



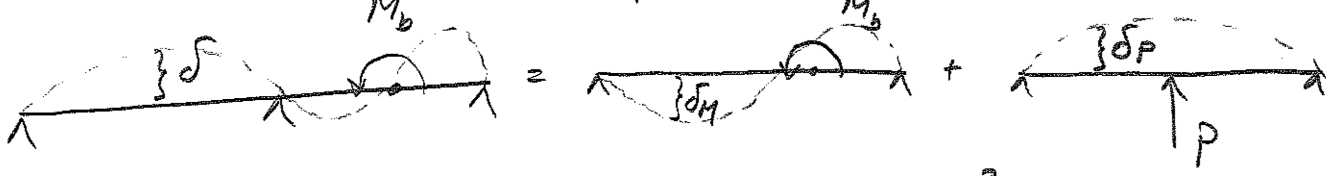
$$\delta_M' = \frac{M_b(2L)^2}{6EI}\left[\left(1-3\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = \frac{3M_bL^2}{16EI}$$

$$\delta_P' = \frac{P(2L)^3}{3EI}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{PL^3}{6EI}$$

$$\delta_M' - \delta_P' = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{9M_b}{8L} \qquad (1)$$

Utböjningen mitt på balkdelen AB bestäms nu

$\beta = \xi = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $\xi = \frac{1}{4},\ \beta = \frac{1}{2}$



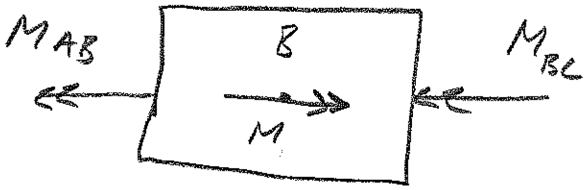
$$\delta_M = \frac{M_b(2L)^2}{6EI}\left[\left(1-3\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^3\right] = \frac{M_bL^2}{8EI}$$

$$\delta_P = \frac{P(2L)^3}{6EI}\,\frac{1}{2}\left[\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^3\right] \underset{(1)}{=} \frac{33M_bL^2}{256EI}$$

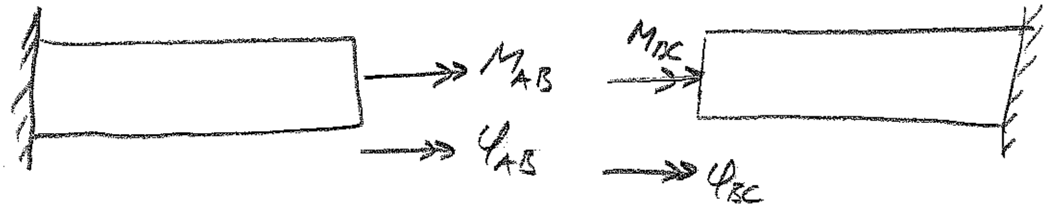
$$\delta = \delta_P - \delta_M = \frac{M_bL^2}{256EI}.$$

Svar: Utböjningen mitt på AB är $\frac{M_bL^2}{256EI}$ uppåt

3) Snitt kring punkten B & frilägg



$(\leftarrow)$: $M_{AB} + M_{BC} - M = 0$ (1)



Deformationsvillkor: $\varphi_{AB} = \varphi_{BC} = \varphi$ i punkten B (2)

Då tvärsnittet i båda sektionerna är samma (dvs W_v & K är samma) ger villkoret att spänningen ska vara samma att vridmomenten i respektive del är samma, dvs

$$M_{AB} = M_{BC} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}M \qquad (3)$$

Från FS: $\varphi = \frac{M_v L}{GK} \underset{(2,3)}{\Rightarrow} \underline{\underline{L_{BC}}} = L_{AB}\frac{G_{BC}}{G_{AB}} = 1{,}2\,\frac{26\cdot 10^9}{80\cdot 10^9} = \underline{\underline{0{,}39\text{ m}}}$

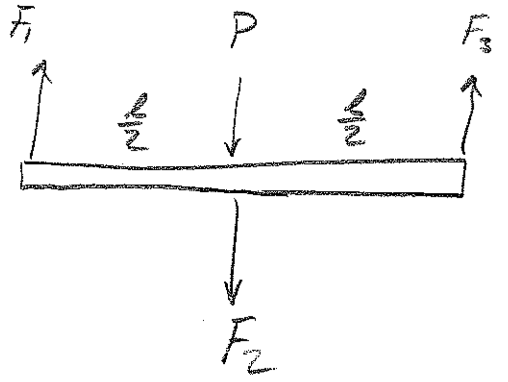
Maximala skjuvspänning ges av $\tau_{max} = \frac{M_v}{W_v}$ där $W_v = \frac{\pi d^3}{16}$

Förvridningen ges av $\varphi = \frac{M_v L}{GK}$ där $K = \frac{\pi d^4}{32}$

$\underline{\underline{\tau_{max}}} = \frac{\frac{1}{2}M}{\frac{\pi d^3}{16}} \approx \underline{\underline{15\text{ MPa}}}$, $\underline{\underline{\varphi}} = \frac{\frac{1}{2}M L_{AB}}{G_{stål}\frac{\pi d^4}{32}} \approx 0{,}0030\text{ rad} \approx \underline{\underline{0{,}17^\circ}}$

3) Antag att oket kommer i kontakt med träklossen.

Frilägg oket o ställ upp jämvikt



$\curvearrowright_{mitt}$: $F_1 \frac{L}{2} - F_3 \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow F_1 = F_3$

$(\uparrow)$: $F_1 - F_2 + F_3 - P = 2F_1 - F_2 - P = 0$

$\Rightarrow 2\sigma_S A_S - \sigma_T A_T - P = 0 \quad (1)$

Problemet är statiskt obestämt, dvs behöver deformationsvillkor.

Deformationsvillkor: $-\delta_{trä} = \delta_{stål} - \Delta \quad (2)$

OBS! Träklossen trycks ihop

Materialsamband: $\left.\begin{array}{l} \varepsilon = \frac{\delta}{L} \\ \sigma = E\varepsilon \end{array}\right\} \delta = \frac{\sigma L}{E} \Rightarrow \begin{cases} \delta_{stål} = \frac{\sigma_S L_S}{E_S} \\ \delta_{trä} = \frac{\sigma_T L_T}{E_T} \end{cases} \quad (3)$

(2) o (3) ger $-\frac{\sigma_T L_T}{E_T} = \frac{\sigma_S L_S}{E_S} - \Delta \quad (4)$

Antag att stängerna är fullt belastade, dvs $\sigma_S = 170$ MPa.

$(4) \Rightarrow \sigma_T = \frac{E_T}{L_T}\left(\Delta - \frac{\sigma_S L_S}{E_S}\right) = \frac{10 \cdot 10^9}{0{,}25}\left(1{,}5 \cdot 10^{-4} - \frac{170 \cdot 10^6 \cdot 1}{207 \cdot 10^9}\right) \approx -27 \text{ MPa}$

Träklossen belastas för mycket, dvs antagandet är fel. Antag $\sigma_T = -10$ MPa

$(4) \Rightarrow \sigma_S = \frac{E_S}{L_S}\left(\Delta - \frac{\sigma_T L_T}{E_T}\right) = \frac{207 \cdot 10^9}{1}\left(1{,}5 \cdot 10^{-4} - \frac{(-10 \cdot 10^6) \cdot 0{,}25}{10 \cdot 10^9}\right) = 82{,}8 \text{ MPa}$

Antagandet att träklossen är dimensionerande stämmer.

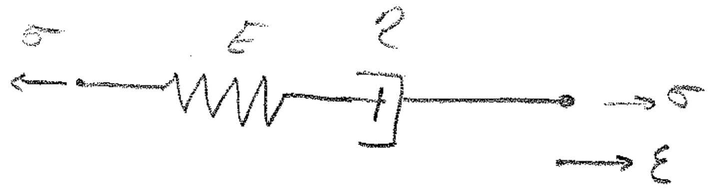
(1) ger $\underline{\underline{P}} = 2\sigma_S A_S - \sigma_T A_T =$

$$= 2 \cdot 828 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi (10 \cdot 10^{-3})^2}{4} + 10 \cdot 10^6 \; (50 \cdot 10^{-3})^2 \approx \underline{\underline{38 \text{ kN}}}$$

<u>Svar</u>: Det maximala värdet på P är 38 kN.

---

4) Maxwell-material :



$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{fjäder}} + \varepsilon_{\text{dämpare}} \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{\text{fjäder}} + \dot{\varepsilon}_{\text{dämpare}} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \qquad (1)$$

$$\sigma = \sigma_{\text{fjäder}} = \sigma_{\text{dämpare}}$$

Integrera (1) & låt $\sigma = \sigma_0$ = konstant: $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t \quad (2)$

Om spänningen hålls konstant kommer töjningen öka med tiden

Med $\sigma_0 = 100$ MPa under 2 sekunder ges töjningen

$$\varepsilon_1 = \frac{100 \cdot 10^6}{12 \cdot 10^9} + \frac{100 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^9} \cdot 2 \approx 0{,}0483$$

Med $\sigma_0 = 150$ MPa under 3 sekunder ges ett extra bidrag till töjningen

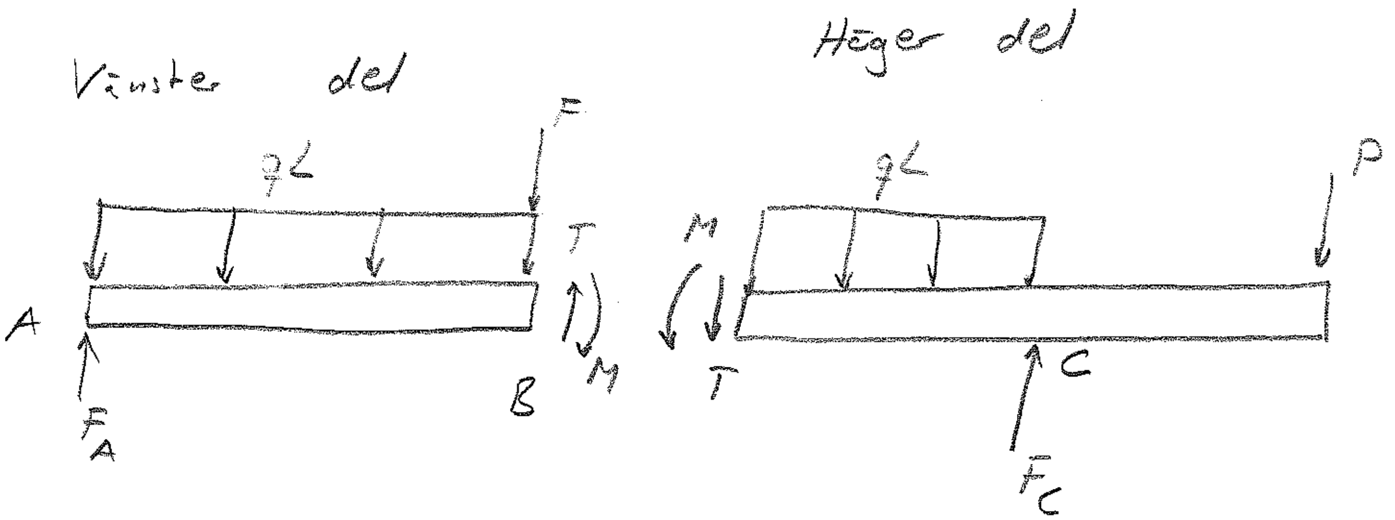
$$\varepsilon_2 = \frac{(150 \cdot 10^6 - 100 \cdot 10^6)}{12 \cdot 10^9} + \frac{150 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^9} \cdot 3 \approx 0{,}0942$$

Total töjning efter 5 s är $\underline{\varepsilon} = 0{,}0483 + 0{,}0942 \approx \underline{\underline{0{,}143}}$ vilket är den maximala töjningen då töjningen minskar vid avlastning.

5)

Då det endast frågas efter P så att momentet vid B är noll o tvärkraften precis till höger om B räcker det att snitta mellan B o det högra stödet.

Snitta o ställ upp jämvikt



$\overset{\curvearrowright}{A}$: $FL - TL + qL\frac{L}{2} + M = 0$

$\overset{\curvearrowright}{C}$: $PL - TL - qL\frac{L}{2} - M = 0$

Kräver att $M = 0$, dvs

$T = F + \frac{qL}{2} = 13 + \frac{12 \cdot 2}{2} = 25\,kN$ (1)

T ges av (1) o $M = 0$, dvs

$P = T + \frac{qL}{2} = F + qL = 13 + 12 \cdot 2 = 37\,kN$

<u>Svar:</u> För att böjmomentet i B ska vara noll krävs $P = 37\,kN$. Tvärkraften precis till höger om B är $T = 25\,kN$.