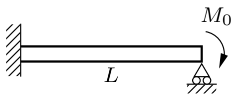
Tentamen i hållfasthetslära FHLA10 (FHL105), 2019-04-26 kl. 8-13

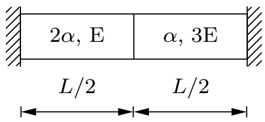
Tentamen omfattar 5 problem vilka bedöms i hela poäng, 0-6 poäng per uppgift. Summa 15-19 ger betyget 3, 20-24 ger betyget 4 och 25-30 poäng ger betyget 5. Tillåtna hjälpmedel är räknedosa och formelblad från kursens hemsida.

Alla lösningar skall vara välstrukturerade, lätta att följa, väl motiverade och ett tydligt svar skall anges till varje uppgift.

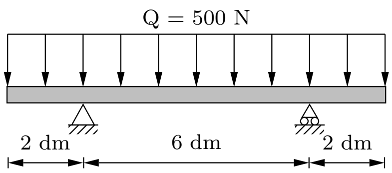
1. En elastisk balk med längden L och böjstyvheten EI är i dess vänstra ände fast inspänd och den högra änden är fritt upplagd. Balkens högra ände belastas med ett moment M_0 enligt figuren. Använd elastiska linjens ekvation för att bestämma utböjningen w längs balken samt var den största utböjningen sker.



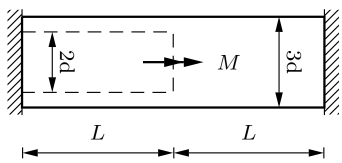
2. En stång är sammansatt av två lika långa delar med identiska tvärsnitt men som är tillverkade av olika material. Materialen karakteriseras av dess termiska längdutvidgningskoefficient (2α respektive α) och dess elasticitetsmodul (E respektive $3E$). Den sammansatta stången är från början spänningsfritt monterad mellan två stela väggar enligt figuren. Beräkna hur mycket och åt vilket håll stångens mittpunkt rör sig om stången utsätts för en temperaturändring ΔT.



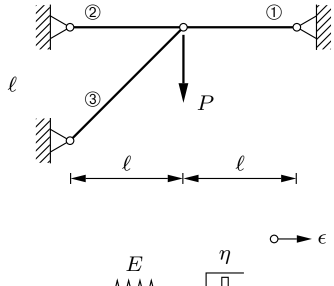
3. För att få plats med din kurslitteratur bestämmer du dig för att sätta upp en ny bokhylla. Den totala belastningen på hyllan (böcker + hyllans vikt) kan antas vara jämnt fördelad. När hyllan är full med böcker blir den totala lasten Q = 500 N. Hyllan hålls uppe av två stöd enligt figuren och är tillverkad av en massiv furuplanka med ett rektangulärt tvärsnitt med bredden 3 dm. Materialet i plankan antas vara homogent med en elasticitetsmodul E = 12 GPa. Vilken tjocklek måste hyllan minst ha om man av estetisk skäl inte vill att nedböjningen av hyllans mittpunkt ska bli mer än 1 mm?

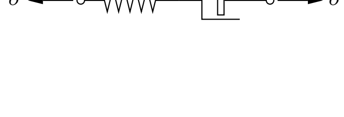


4. En cylindrisk axel med längden 2L och ytterdiametern 3d är till halva sin längd urborrad med ett hål vars diameter är 2d. Axeln är fast inspänd i sina ändar och belastas med ett vridande moment M som angriper vid halva axelns längd. Materialet i axeln är elastiskt med skjuvmodulen G. Bestäm förvridningsvinkeln där momentet angriper. Bestäm även den maximala skjuvspänningen samt var längs axeln denna uppstår.

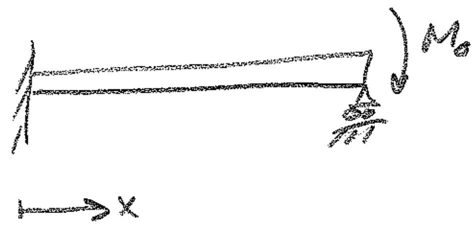


5. Ett fackverk bestående av tre stänger, varje med tvärsnittsarean A, belastas med kraften P enligt figuren. Materialbeteendet i stängerna kan beskrivas med den reologiska modellen i figuren där fjädern beskrivs av $\sigma = E\epsilon$ och dämparen beskrivs av $\sigma = \eta\dot{\epsilon}$. Bestäm stångkrafterna och knutpunktens förskjutningen som funktion av tiden om kraften P läggs på momentant vid tiden t = 0.





1) $q=0$ ger $EIw^{IV}=0$



Integration ger:

$$EIw'''=A$$

$$EIw''=Ax+B$$

$$EIw'=\frac{1}{2}Ax^2+Bx+C$$

$$EIw=\frac{1}{6}Ax^3+\frac{1}{2}Bx^2+Cx+D \qquad (1)$$

<u>Randvillkor:</u> $w(0)=0$, $w'(0)=0 \Rightarrow D=0$ & $C=0$

$$w(L)=0,\ EIw''(L)=-M_0 \Rightarrow \begin{cases} AL+B=-M_0 \\ \frac{1}{6}AL^3+\frac{1}{2}BL^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{3}{2}\frac{M_0}{L} \\ B=\frac{1}{2}M_0 \end{cases}$$

Insättning av A, B, C & D i (1) ger

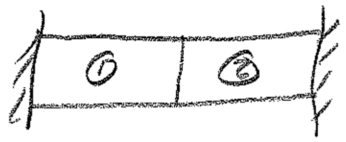
$$\underline{w(x)=\frac{M_0}{4EI}\left(x^2-\frac{x^3}{L}\right)}$$

Maximal utböjning där $\frac{dw}{dx}=0 \Rightarrow \frac{M_0}{4EI}\left(2x-\frac{3x^2}{L}\right)=0$

$$\Rightarrow x^2-\frac{2}{3}Lx=0 \Rightarrow x=\frac{L}{3}\pm\frac{L}{3} \Rightarrow \underline{x=\frac{2L}{3}}$$

<u>Svar:</u> Utböjningen ges av $w(x)=\frac{M_0}{4EI}\left(x^2-\frac{x^3}{L}\right)$ & är max vid $x=\frac{2L}{3}$

2) * Jämvikt ger att spänningen i båda delarna är lika, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (1)



* Deformationsvillkor ges av att den totala töjningen är noll pga stela väggar, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$ (2)

* Materialsamband:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_1^e + \varepsilon_1^T = \dfrac{\sigma_1}{E_1} + \alpha_1 \Delta T = \dfrac{\sigma}{E} + 2\alpha\Delta T & (3) \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_2^e + \varepsilon_2^T = \dfrac{\sigma_2}{E_2} + \alpha_2 \Delta T = \dfrac{\sigma}{3E} + \alpha\Delta T & (4) \end{cases}$$

Vi har fyra obekanta $(\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ & fyra ekvationer.

(2)-(4) ger $\dfrac{\sigma}{E} + 2\alpha\Delta T + \dfrac{\sigma}{3E} + \alpha\Delta T = 0$

$$\Rightarrow \quad \sigma = -\frac{9}{4} E\alpha\Delta T \qquad (5)$$

(3), (4) & (5) ger:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = -\dfrac{1}{4}\alpha\Delta T \\ \varepsilon_2 = \dfrac{1}{4}\alpha\Delta T \end{cases} \qquad (6)$$

Förskjutningen av mittpunkten kan beräknas med (6) & $\varepsilon = \dfrac{\delta}{L}$

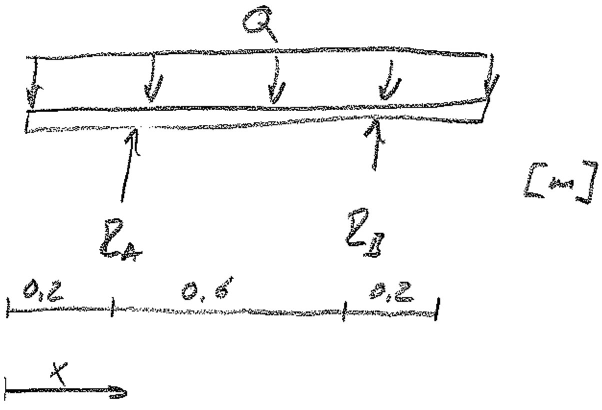
$$\begin{cases} \delta_1 = \varepsilon_1 L_1 = \varepsilon_1 \dfrac{L}{2} = -\dfrac{1}{8} L\alpha\Delta T \\ \delta_2 = \varepsilon_2 L_2 = \varepsilon_2 \dfrac{L}{2} = \dfrac{1}{8} L\alpha\Delta T \end{cases}$$

<u>Svar:</u> Stångens mittpunkt rör sig $\frac{1}{8} L\alpha\Delta T$ åt vänster.

3)

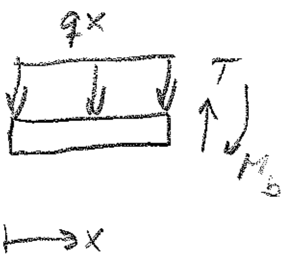
Symmetri & jämvikt ger

$$R_A = R_B = \frac{Q}{2} \qquad (1)$$



Snitta balken innan första stödet

<u>$0 \le x \le 0{,}2$ m</u>



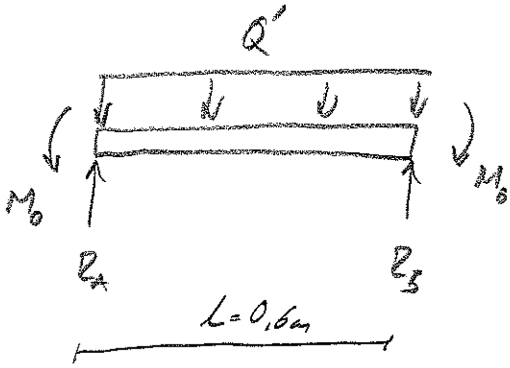
$$(\uparrow): T - \frac{Q}{L}x = 0 \Rightarrow T(x) = \frac{Q}{L}x \quad \text{där } L = 1\text{m}$$

$$(\curvearrowright): M_b - \frac{Q}{L}x\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow M_b(x) = \frac{Q}{2L}x^2 \qquad (2)$$

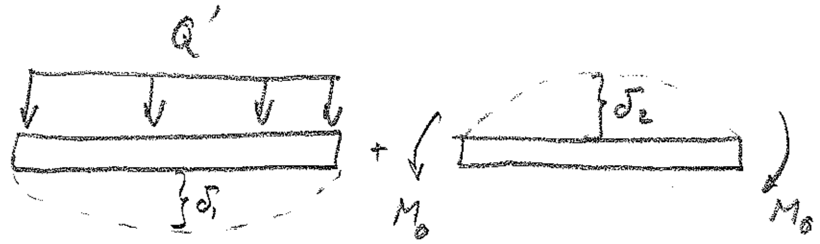
Precis vid stödet ger (2): $M_b(x=0{,}2) = 10\,\text{Nm} = M_0$ (3)

Symmetrin ger samma snittmoment vid andra stödet.

Balkdelen mellan stöden kan nu ses som:



=



Elementarfall ger: $\delta_1 = \dfrac{5Q'\ell^3}{384EI}$ där $Q' = \dfrac{6}{10}Q = \dfrac{3}{5}Q$ (4)

$$\delta_2 = \frac{M_0\ell^2}{6EI}\left(2\tfrac{1}{2} - 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^3\right) = \frac{M_0\ell^2}{8EI} \qquad (5)$$

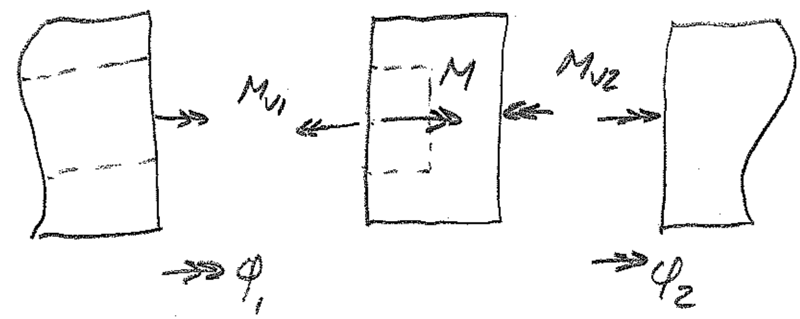
Total nedböjning blir $\delta = \delta_1 - \delta_2$ (6)

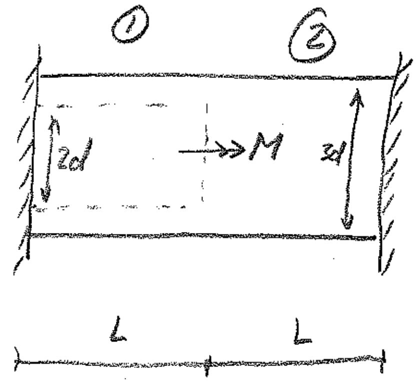
Med $E = 12$ GPa, $I = \dfrac{bh^3}{12} = \dfrac{0{,}3}{12}h^3$ & $\delta = 10^{-3}$ m ger (3)-(6)

$$I = \frac{3Q\ell^3}{384E\delta} - \frac{M_0\ell^2}{8E\delta} = \frac{0{,}3}{12}h^3 \Rightarrow h \approx 11\text{ mm}$$

<u>Svar</u>: Tjockleken måste minst vara 11 mm

4) Friläggning av en liten bit





Jämvikt ($\longrightarrow$) $M - M_{v1} - M_{v2} = 0$ (1)

Deformationsvillkor, mitt på axeln gäller $\varphi_1 = \varphi_2$

där $\varphi_1 = \dfrac{M_{v1} L}{G K_1}$ & $\varphi_2 = \dfrac{M_{v2} L}{G K_2}$, dvs $\dfrac{M_{v1}}{K_1} = \dfrac{M_{v2}}{K_2}$ (2)

Tvärsnittsstorheter: Del ①: $K_1 = \dfrac{\pi}{32}\left((3d)^4 - (2d)^4\right) = \dfrac{65\pi}{32} d^4$ (3)

$$W_1 = \frac{\pi}{16 \cdot 3d}\left((3d)^4 - (2d)^4\right) = \frac{65\pi}{48} d^3 \quad (4)$$

Del ②: $K_2 = \dfrac{\pi (3d)^4}{32} = \dfrac{81\pi}{32} d^4$ (5)

$$W_2 = \frac{\pi \cdot (3d)^3}{16} = \frac{27\pi}{16} d^3 \quad (6)$$

(2), (3) & (5) ger $81 M_{v1} = 65 M_{v2}$ (7)

Insättning av (7) i (1) ger $M_{v1} = \dfrac{65}{146} M$ & $M_{v2} = \dfrac{81}{146} M$ (8)

Förvridningsvinkeln ges av tex. $\underset{\sim}{\varphi_1} = \dfrac{M_{v1} L}{G K_1} = \underset{\sim\sim\sim}{\dfrac{16 ML}{73 \pi G d^4}}$

Kontrollera vilken axeldel som bär högst skjuvspänning

$$\tau_{max} = \frac{M_v}{W_v} \Rightarrow \left[(4), (6) \text{ o } (8) \right] \Rightarrow \begin{cases} \tau_{max1} = \dfrac{M_{v1}}{W_{v1}} = \dfrac{24M}{73\pi d^3} \\ \tau_{max2} = \dfrac{M_{v2}}{W_{v2}} = \dfrac{24M}{73\pi d^3} \end{cases}$$

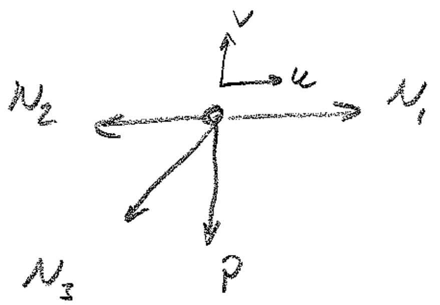
Dvs. den maximala skjuvspänningen är lika längs hela axeln.

Svar: Förvridningsvinkeln mitt på axeln är $\frac{16\,ML}{73\pi G d^4}$ o

den maximala skjuvspänningen är $\frac{24M}{73\pi d^3}$ längs hela

axeln.

5) <u>Frilägg</u> den gemensamma knutpunkten



$$(\longrightarrow) \quad N_1 - N_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} N_3 = 0 \qquad (1)$$

$$(\uparrow) \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} N_3 - P = 0 \qquad (2)$$

<u>Deformationsvillkor:</u>

$$\begin{cases} \delta_1 = -u \\ \delta_2 = u \\ \delta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} u + \frac{1}{\sqrt{2}} v \end{cases} \qquad (3)$$

<u>Materialsamband:</u> $\sigma_f = \sigma_d = \sigma \quad , \quad \sigma_f = E\varepsilon_f \quad , \quad \sigma_d = \eta \dot{\varepsilon}_d$

$$\varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_d \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_f + \dot{\varepsilon}_d$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Konstant kraft $P \Rightarrow \dot{\sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{\eta} t + B$

Initiellt beter sig materialet elastiskt pga momentan pålastning

$$\Rightarrow \quad \varepsilon(0) = \frac{\sigma}{\eta} \cdot 0 + B = \frac{\sigma}{E} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\sigma}{E}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{\eta} t + \frac{\sigma}{E} = \sigma \left(\frac{t}{\eta} + \frac{1}{E} \right) \qquad (4)$$

Materialsambandet skrivs om till strukturnivå:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \varepsilon L \\ \sigma &= \frac{F}{A} \\ \varepsilon &= \sigma\left(\frac{t}{\eta} + \frac{1}{E}\right) \end{aligned}\right\} \delta = \frac{FL}{A}\left(\frac{t}{\eta} + \frac{1}{E}\right) \Rightarrow \begin{cases} \delta_1 = \dfrac{N_1 l}{A}\left(\dfrac{t}{\eta} + \dfrac{1}{E}\right) \\ \delta_2 = \dfrac{N_2 l}{A}\left(\dfrac{t}{\eta} + \dfrac{1}{E}\right) \\ \delta_3 = \dfrac{N_3 \sqrt{2} l}{A}\left(\dfrac{t}{\eta} + \dfrac{1}{E}\right) \end{cases} \quad (5)$$

(3) o (5) ger $N_1 = -N_2$ (6)

(1), (2) o (6) ger
$$\begin{cases} N_1 = -\dfrac{P}{2} \\ N_2 = \dfrac{P}{2} \\ N_3 = -\sqrt{2} P \end{cases} \quad (7)$$

Förskjutningen av knutpunkten ges av (3), (5) o (7)

$$\begin{cases} u = \delta_2 = \dfrac{Pl}{2A}\left(\dfrac{t}{\eta} + \dfrac{1}{E}\right) \\ v = \sqrt{2}\,\delta_3 - u = -\dfrac{4\sqrt{2}+1}{2}\dfrac{Pl}{A}\left(\dfrac{t}{\eta} + \dfrac{1}{E}\right) \end{cases}$$