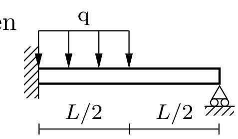
Tentamen i hållfasthetslära FHLA10 (FHL105), 2019-08-20 kl. 14-19

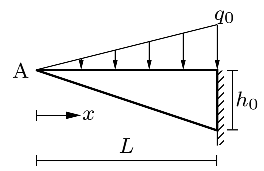
Tentamen omfattar 5 problem vilka bedöms i hela poäng, 0-6 poäng per uppgift. Summa 15-19 ger betyget 3, 20-24 ger betyget 4 och 25-30 poäng ger betyget 5. Tillåtna hjälpmedel är miniräknare och formelblad från kursens hemsida.

Alla lösningar skall vara välstrukturerade, lätta att följa, väl motiverade och ett tydligt svar skall anges till varje uppgift.

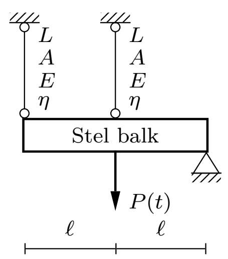
1. Den fria änden av en elastisk konsolbalk med längden L och böjstyvheten EI är upplagd på ett rullstöd. Över halva balkens längd verkar en jämnt utbredd belastning med lastintensiteten q enligt figuren. Bestäm samtliga stödreaktioner.

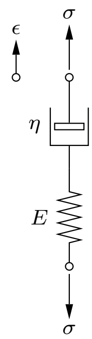


2. Konsolbalken i figuren till höger har ett rektangulär tvärsnitt med konstant bredd b och en linjärt varierande höjd (maximal höjd h_0). Balken belastas av en linjärt distribuerad last vars maximala lastintensitet är q_0. Bestäm utböjningen av balkens fria ände A om balken är tillverkad av ett linjärelastiskt material med elasticitetsmodulen E.

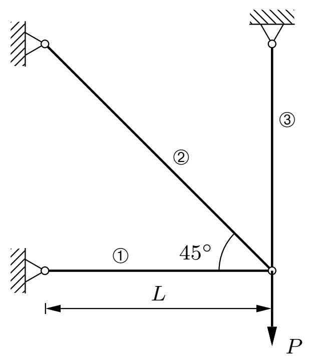


3. En stel balk är ledat infäst i ena änden och upphängt i två likadana linor enligt figuren. Linornas tvärsnittsarea är A, dess ursprungliga längd är L och dess materialbeteende kan beskrivas med materialmodellen i figuren där E är elasticitetsmodulen och η är viskositetsmodulen. Bestäm kraften P som funktion av tiden så förskjutningen vid kraftens angreppspunkt blir konstant δ_0. Förskjutningen vid kraftens angreppspunkt sker momentant vid tiden $t = 0$.
Ledning: En elastisk fjäder beskrivs av $\sigma = E\varepsilon$ och en viskös dämpare beskrivs av $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$.

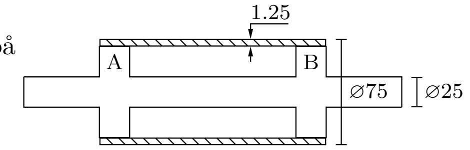




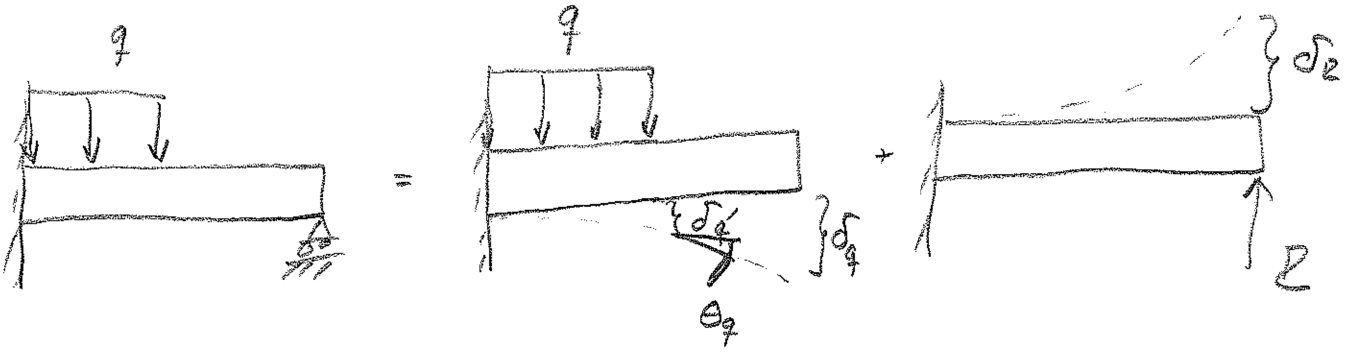
4. Ett fackverk bestående av tre elastiska stålstänger belastas med kraften $P = 150$ kN enligt figuren. Stängerna 1 och 2 har lika stor tvärsnittsarea medan stång 3 har en tvärsnittsarea som är hälften så stor som för de två andra stängerna. Av konstruktionstekniska skäl är den till beloppet högst tillåtna spänningen 80 MPa i stång 1, 60 MPa i stång 2 och 120 MPa i stång 3. Bestäm tvärsnittsarean för respektive stång så att spänningen (till beloppet) inte överstiger den maximalt tillåtna.



5. En cirkulär stålaxel med diametern 25 mm är försedd med två cirkulära flänsar, A och B, enligt figuren. Utanpå axelns flänsar svetsas ett tunnväggigt rör av samma material fast. Rörets godstjocklek är 1.25 mm. Under tiden som röret svetsas fast utsätts axelns fria ändar för ett vridande moment om 75 Nm. När svetsningen är genomförd tas det yttre momentet bort. Bestäm storleken av skjuvspänningen i röret efter att det yttre moments tagits bort. Flänsarna antas vara stela och mycket korta i förhållande till rörets längd.



1) Dela upp i elementarfall



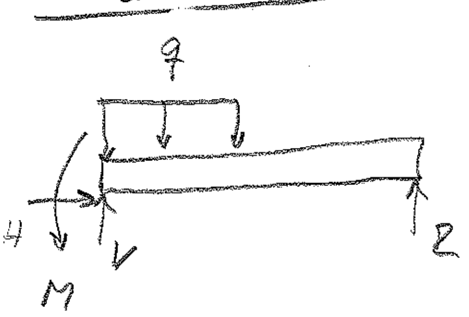
δ_q fås genom att betrakta balken som en konsolbalk med längden $L/2$ o lägga till nedböjningen av den yttre halvan pga vinkeländringen pga q, θ_q.

$$\delta_q = \delta_q' + \theta_q \frac{L}{2} = \frac{q\frac{L}{2}\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^3}{8EI} + \frac{q\frac{L}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2}{6EI}\cdot\frac{L}{2} = \frac{7qL^4}{384EI}$$

$$\delta_R = \frac{RL^3}{3EI}$$

Deformationsvillkor: $\delta_q - \delta_R = 0 \Rightarrow R = \frac{7qL}{128}$ (1)

Frilägg hela balken



$(\uparrow)$ $R + V - q\frac{L}{2} = 0 \underset{(1)}{\Rightarrow} V = \frac{57qL}{128}$ (2)

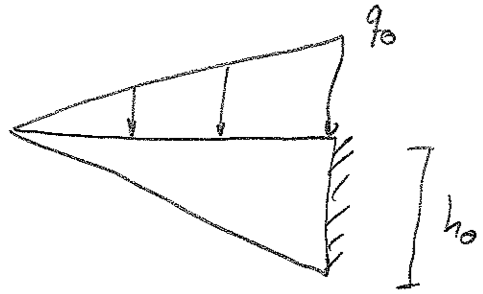
$(\rightarrow)$ $H = 0$

vänstra ände: $q\frac{L}{2}\cdot\frac{L}{4} - R\cdot L - M = 0 \underset{(1)}{\Rightarrow} M = \frac{9qL^2}{128}$

Svar: $R = \frac{7qL}{128}$, $V = \frac{57qL}{128}$, $H = 0$, $M = \frac{9qL^2}{128}$

2)

$$q(x) = -q_0 \frac{x}{L}$$



$$I(x) = \frac{bh(x)^3}{12} = \frac{b\left(h_0 \frac{x}{L}\right)^3}{12} = \frac{bh_0^3 x^3}{12L^3}$$

Elastiska linjens ekvation:

$$(EI(x)w'')'' = q = -q_0 \frac{x}{L}$$

$$(EI(x)w'')' = -\frac{q_0}{2L}x^2 + A$$

$$EI(x)w'' = -\frac{q_0}{6L}x^3 + Ax + B$$

Randvillkor $M_b(0) = 0,\ T(0) = 0 \Rightarrow A = 0,\ B = 0$

$$\Rightarrow E\frac{bh_0^3 x^3}{12L^3} w'' = -\frac{q_0}{6L}x^3$$

$$\Rightarrow w'' = -\frac{2q_0 L^2}{bh_0^3 E}$$

$$w' = -\frac{2q_0 L^2}{bh_0^3 E}x + C$$

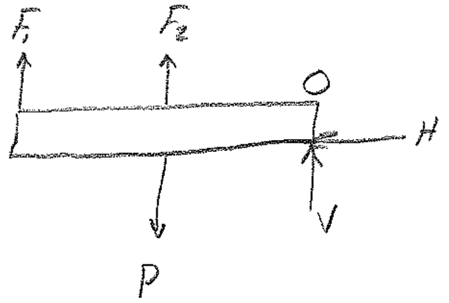
$$w = -\frac{q_0 L^2}{bh_0^3 E}x^2 + Cx + D$$

Randvillkor: $w'(L) = 0,\ w(L) = 0 \Rightarrow C = \frac{2L^3 q_0}{bh_0^3 E},\ D = -\frac{L^4 q_0}{bh_0^3 E}$

$$\Rightarrow w(x) = -\frac{q_0 L^4}{bh_0^3 E}\left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{2x}{L} + 1\right)$$

<u>Svar</u>: $w(0) = -\frac{q_0 L^4}{bh_0^3 E}$

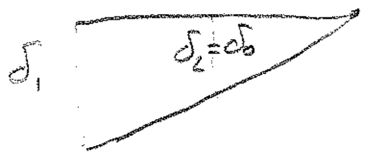
3) Frilägg balken



$$\overset{\curvearrowright}{O}: \; F_1 \cdot 2l + F_2 \cdot l - P \cdot l = 0$$

$$\sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow \quad P - 2\sigma_1 A - \sigma_2 A = 0 \qquad (1)$$

Deformationsvillkor



$$\frac{\delta_1}{2l} = \frac{\delta_2}{l} = \frac{\delta_0}{l} \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = 2\delta_2 = 2\delta_0 \qquad (2)$$

Materialsamband

$$\dot{\varepsilon}_{total} = \dot{\varepsilon}_{fjäder} + \dot{\varepsilon}_{dämpare} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\varepsilon}$$

$$\sigma_{fjäder} = \sigma_{dämpare} = \sigma$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\dot{\sigma}_1}{E} + \frac{\sigma_1}{\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = A_1 e^{-\frac{E}{\eta}t} \qquad (3)$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{\dot{\sigma}_2}{E} + \frac{\sigma_2}{\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 = A_2 e^{-\frac{E}{\eta}t} \qquad (4)$$

Momentan pålastning ger helt elastiskt beteende:

$$\sigma_1(0) = E\varepsilon_1(0) = E\frac{\delta_1}{L} = E\frac{2\delta_0}{L} = A_1 e^0 \quad \Rightarrow A_1 = 2E\frac{\delta_0}{L}$$

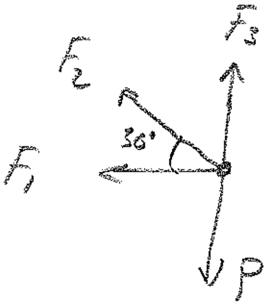
$$\sigma_2(0) = E\varepsilon_2(0) = E\frac{\delta_2}{L} = E\frac{\delta_0}{L} = A_2 e^0 \quad \Rightarrow A_2 = E\frac{\delta_0}{L}$$

Insatt ; (3) & (4) ger $\quad \sigma_1 = 2E\frac{\delta_0}{L}e^{-\frac{E}{\eta}t}, \quad \sigma_2 = E\frac{\delta_0}{L}e^{-\frac{E}{\eta}t}$

Insatt ; (1) ger $\quad P = \frac{5EA\delta_0}{L}e^{-\frac{E}{\eta}t}$

4)

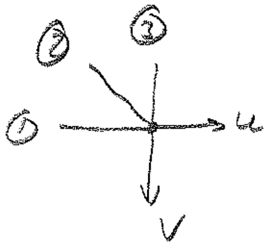
Frilägg knutpunkten



$$(\uparrow)\quad F_2 \sin 45° + F_3 - P = 0 \qquad (1)$$

$$(\leftarrow):\quad F_1 + F_2 \cos 45° = 0 \qquad (2)$$

Deformationsvillkor:



$$\begin{cases} \delta_1 = u \\ \delta_2 = u\cos 45° + v\sin 45° \\ \delta_3 = v \end{cases} \qquad (3)$$

Materialsamband:

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad \varepsilon = \frac{\delta}{L}, \quad \sigma = E\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{FL}{EA} \qquad (4)$$

Ekv (3)+(4) o respektive stångs längd o area ger

$$F_2 = \frac{1}{2}F_1 + F_3 \qquad (5)$$

Ekv (1), (2) o (5) ger

$$F_1 = -\frac{2}{3+2\sqrt{2}}P, \quad F_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}P, \quad F_3 = \frac{1+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}P \qquad (6)$$

Beräkna nödvändig area för att uppfylla kravet på maximal spänning

Nödvändig tvärsnittsarea:

$$A = \left|\frac{F}{\sigma}\right| \Rightarrow A_1 = \left|\frac{F_1}{\sigma_1}\right| = \frac{2 \cdot 150 \cdot 10^3}{(3+2\sqrt{2}) \cdot 80 \cdot 10^6} \approx 6{,}4 \cdot 10^{-4}\, m^2$$

$$A_2 = \left|\frac{F_2}{\sigma_2}\right| = \frac{2\sqrt{2} \cdot 150 \cdot 10^3}{(3+2\sqrt{2}) \cdot 60 \cdot 10^6} \approx 12 \cdot 10^{-4}\, m^2$$

$$A_3 = \left|\frac{F_3}{\sigma_3}\right| = \frac{(1+2\sqrt{2}) \cdot 150 \cdot 10^3}{(3+2\sqrt{2}) \cdot 120 \cdot 10^6} \approx 8{,}2 \cdot 10^{-4}\, m^2$$

Kravet $A_1 = A_2 = 2A_3$ ger

$$A_1 = A_2 = 16{,}4 \cdot 10^{-4}\, m^2$$

$$A_3 = 8{,}2 \cdot 10^{-4}\, m^2$$

<u>Svar:</u> $A_1 = A_2 = 16{,}4\ cm^2$ & $A_3 = 8{,}2\ cm^2$

5) Det under monteringen pålagda momentet, $M_0 = 75$ Nm, ger upphov en förvridning av axeln, φ_0.

Efter montering & avlastning gäller: $M_{axel} = M_{rör} = M$ (1)

När M_0 avlägsnas kommer axeln vrida röret $\varphi_{rör}$

Axelns totala förvridning efter monteringen är:

$$\varphi_{axel} = \varphi_0 - \varphi_{rör} \quad (2)$$

Med $\varphi = \frac{M_v L}{GK}$, (1) & (2) fås

$$\frac{M_{axel} L}{G K_{axel}} = \frac{M_0 L}{G K_{axel}} - \frac{M_{rör} L}{G K_{rör}} \Rightarrow \frac{M_0}{K_{axel}} = \frac{M}{K_{axel}}\left(1 + \frac{K_{axel}}{K_{rör}}\right)$$

$$\Rightarrow M = \frac{M_0}{1 + \frac{K_{axel}}{K_{rör}}} = \left[\begin{array}{l} K_{axel} = \frac{\pi d_{axel}^4}{32} \\ K_{rör} = \frac{\pi d_{rör}^3 t}{4} \end{array}\right] = \frac{M_0}{1 + \frac{d_{axel}^4}{8 t d_{rör}^3}}$$

Spänningen i röret fås av

$$\tau_{max} = \frac{M_v}{W_v} = \frac{M}{\frac{\pi d_{rör}^2 t}{2}} = \frac{2 M_0}{\pi d_{rör}^2 t + \frac{\pi d_{axel}^4}{8 d_{rör}}} = \frac{2 \cdot 75}{\pi (25 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-3} + \frac{\pi (25 \cdot 10^{-3})^4}{8 \cdot 75 \cdot 10^{-3}}}$$

$$\approx \underline{6{,}2 \text{ MPa}}$$

<u>Svar</u>: $\tau_{rör} \approx 6{,}2$ MPa efter monteringen.