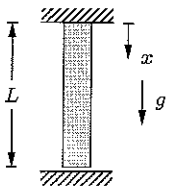
Tentamen i hållfasthetslära FHLA10 (FHL105), 2020-01-16 kl. 14-19

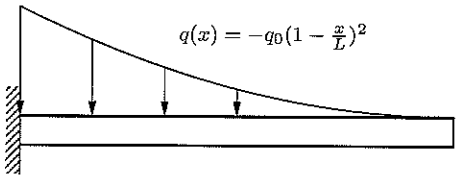
Tentamen omfattar 5 problem vilka bedöms i hela poäng, 0-12 poäng per uppgift. Summa 30-39 ger betyget 3, 40-49 ger betyget 4 och 50-60 poäng ger betyget 5. Tillåtna hjälpmedel är miniräknare och formelblad från kursens hemsida (utan anteckningar).

Alla lösningar skall vara välstrukturerade, lätta att följa, väl motiverade och ett tydligt svar skall anges till varje uppgift.

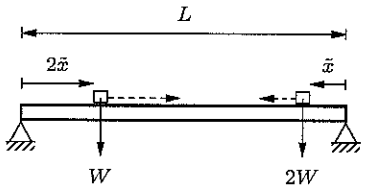
1. En massiv stång (längd L, densitet ρ, tvärsnittsarea A, elasticitetsmodul E och längdutvidgningskoefficient α) är upphängd i gravitationsfältet och fast inspänd vid $x = 0$ enligt figuren. Vid rumstemperatur nuddar stångens fria ände precis vid marken. Beräkna spänningsfördelningen $\sigma(x)$ i stången då temperaturen ökat ΔT. Vid vilken temperaturändring ΔT_c uppstår det tryckspänningar i hela stången?



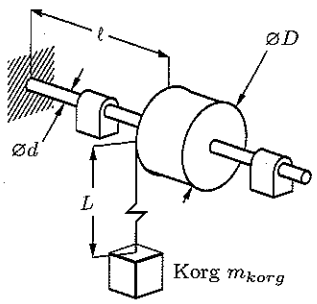
2. En solid elastisk konsolbalk med längden L och böjstyvheten EI belastas med en utbredd belastning enligt figuren. Bestäm hur utböjningen varierar längs med balken samt storleken och läget av balkens maximala utböjningen. Bortse ifrån balkens egenvikt.



3. Två fordon närmar sig varandra på en bro. Fordon 1 rör sig med dubbelt så hög hastighet som fordon 2. Bron kan approximeras med en homogen balk med längden L och fordonen kan representeras av punktkrafter som verkar på balken. Fordon 1 har tyngden W och fordon 2 har tyngden $2W$. Båda fordonen börjar korsa bron samtidigt. Figuren till höger visar situationen då fordonen har rört sig sträckan $2\tilde{x}$ respektive $\tilde{x}$ längs med bron, där $\tilde{x} < L/3$. Visa att bron kommer haverera om bron bara tål att utsättas för ett böjmoment med storleken $WL/2$. Bestäm även avståndet mellan fordonen då detta sker. Hur stort böjmoment måste bron tåla för att fordonen ska kunna passera säkert över bron? Bortse ifrån balkens egenvikt.



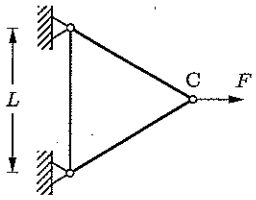
4. Figuren till höger visar en hissanordning för gruvor. Anordningen består av en trumma som har diametern $D = 5$ m vilken är kopplad till en elmotor via en massiv stålaxel med längden $\ell = 1.2$ m och diametern $d = 360$ mm. När hisskorgen är i dess lägsta position är den förbunden med trumman via en stålvajer med längden $L = 200$ m, tvärsnittsarean $A = 3000$ mm^2 och densiteten ρ. I detta läget bromas elmotorn så att denna axelände inte kan vridas. Beräkna hur mycket hisskorgen kommer sjunka om den i detta läge lastas med massan $M_{last} = 9000$ kg. Korgen har massan $m_{korg} = 6000$ kg. Bestäm även den maximala vridskjuvspänningen i axeln. Trumman på axeln kan betraktas som stel och viktlös. Böjningen av axeln kan försummas. Skjuvmodulen är $G = E/(2(1 + \nu))$



5. Ett fackverk består av tre stänger enligt figuren. Stängerna har lika stor tvärsnittsarea, A, och är tillverkade av samma material. Precis när kraften F appliceras beter sig fackverket elastiskt (med elsticitetsmodulen E).

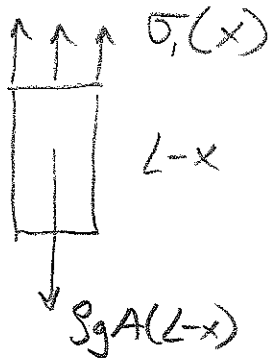
a) Beräkna stångkrafterna som uppträr då fackverket belastas med kraften F enligt figuren. Beräkna även förskjutningen av knutpunkten C i det ögonblick F applicerats.

b) Efter att strukturen utsatts för den konstanta belastningen F en tid upptäcks att förkjutningen har ökat. För att undersöka de ingående delarna avlastas och demonteras fackverket. Det upptäcks då att en del av deformationen kvarstår i de belastade stängerna. Föreslå en rimlig reologisk modell för materialet i stängerna som kan beskriva dess beteendet. *Tips: Det behövs inga beräkningar för denna deluppgift, dock ska det argumenteras för varför den föreslagna modellen kan fånga beteendet som observerats.*



1) Stången utsätts för två belastningar, gravitationsfältet & temperaturändring

<u>Gravitationskraften:</u>



$$(\uparrow)\ \sigma_1 \cdot A - \rho g A(L-x) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_1(x) = \rho g (L-x) \qquad (1)$$

<u>Temperaturändring:</u> En temperaturökning vill ge upphov till en förlängning av stången, Detta förhindras av väggarna & det uppstår en spänning σ_2 i stången

Total töjning: $\varepsilon = \dfrac{\sigma_2(x)}{E} + \alpha \Delta T = 0 \Rightarrow \sigma_2 = -E\alpha\Delta T \quad (2)$

Total spänning: $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \rho g(L-x) - E\alpha\Delta T$

På grund av att stången hindras att förlängas är spänningen alltid negativ vid $x = L$. Tryckspänningar uppstår i hela stången då $\sigma(x=0) < 0$, dvs

$$\rho g L - E\alpha\Delta T_c < 0 \Rightarrow \Delta T_c > \frac{\rho g L}{E\alpha}$$

2) Elastiska linjens ekvation

$$EIw^{IV} = q = -q_0\left(1-\frac{x}{L}\right)^2$$

$$EIw''' = -q_0\left(x - \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{3L^2}\right) + A$$

$$EIw'' = -q_0\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{3L} + \frac{x^4}{12L^2}\right) + Ax + B$$

$$EIw' = -q_0\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{x^4}{12L} + \frac{x^5}{60L^2}\right) + \frac{1}{2}Ax^2 + Bx + C$$

$$EIw = -q_0\left(\frac{1}{24}x^4 - \frac{x^5}{60L} + \frac{x^6}{360L^2}\right) + \frac{1}{6}Ax^3 + \frac{1}{2}Bx^2 + Cx + D$$

Randvillkor: $w(0) = 0 \Rightarrow D = 0$

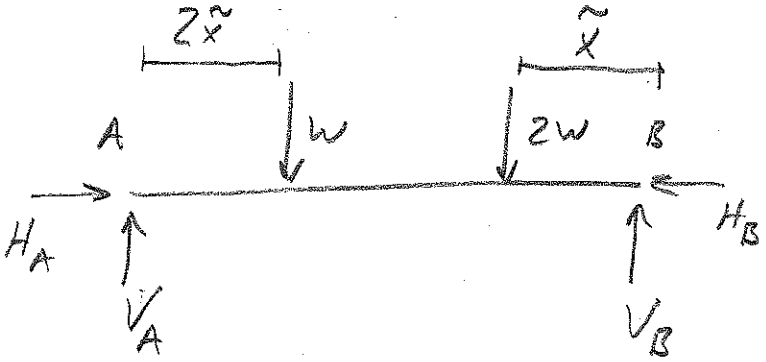
$w'(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$$\left.\begin{array}{l} w''(L) = 0 \\ w'''(L) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \frac{1}{3}q_0L \\ B = -\frac{1}{12}q_0L^2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow w(x) = \frac{q_0}{EI}\left(-\frac{L^2x^2}{24} + \frac{Lx^3}{18} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{60L} - \frac{x^6}{360L^2}\right)$$

Maximal utböjning vid $x = L$, $w(L) = -\dfrac{q_0L^4}{72EI}$

3) Frilägg balken o bestäm stödreaktionerna



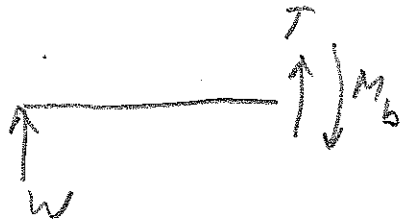
$(\uparrow)\quad V_A + V_B - 3W = 0$

$\overset{\curvearrowright}{A}:\quad 2\tilde{x}W + (L-\tilde{x})2W - V_B L = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_A = W \\ V_B = 2W \end{cases}$$

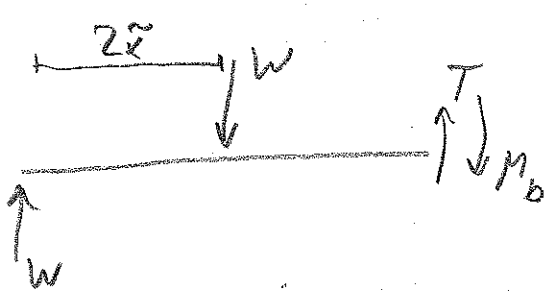
Snitta balken för att bestämma hur M_b varierar

$\underline{0 < x < 2\tilde{x}}$



$\overset{\curvearrowright}{\text{snitt}}:\quad M_b + Wx = 0 \Rightarrow M_b(x) = -Wx$

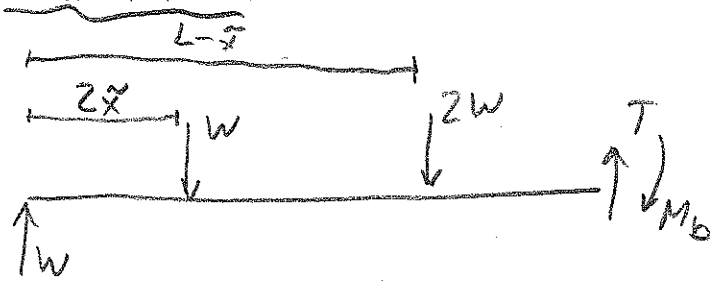
$\underline{2\tilde{x} < x < L-\tilde{x}}$



$\overset{\curvearrowright}{\text{snitt}}:\quad M_b + Wx - W(x - 2\tilde{x}) = 0$

$\Rightarrow M_b = -2\tilde{x}W$

$\underline{L-\tilde{x} < x < L}$



$\overset{\curvearrowright}{\text{snitt}}:\quad M_b + Wx - W(x - 2\tilde{x}) - 2W(x - (L-\tilde{x})) = 0$

$\Rightarrow M_b(x) = 2W(x-L)$

Störst böjmoment mellan fordonen, $M_b = -2\tilde{x}W$ = konstant med avseende på x.

Villkor, bron haverera då $|M_b| = \frac{1}{2}WL$

$$|M_b| = \frac{1}{2}WL = 2\tilde{x}W \Rightarrow \tilde{x} = \frac{1}{4}L < \frac{1}{3}L \Rightarrow \text{giltig lösning}$$

Avståndet mellan fordonen, $l = L - 3\tilde{x}$

Vid kollaps $\underline{l(\tilde{x} = \frac{1}{4}L) = \frac{1}{4}L}$

Böjmomentet ökar linjärt med $\tilde{x}$, för att fordonen ska kunna passera måste bron klara $\underline{|M_b(\tilde{x} = \frac{L}{3})| = \frac{2}{3}LW}$

<u>Svar:</u> Bron haverera då avståndet mellan fordonen är $\frac{1}{4}L$.

För att fordonen ska kunna passera måste bron klara ett maximalt böjmoment om $\frac{2}{3}WL$

4) Hisskorgen sjunker pga förvridning av axeln + förlängning av stålvajern då lasten appliceras i korgen

Förvridningsvinkeln: $\varphi = \frac{M_v l}{GK}$

$M_v = M_{last} g \cdot \frac{D}{2}$

$K = \frac{\pi d^4}{32}$

Sjunker sträckan $\delta_\varphi = \varphi \cdot \frac{D}{2}$

$$\delta_\varphi = \frac{8 M_{last} g l D^2}{\pi G d^4}$$

Förlängning av vajern: $\delta_F = \frac{FL}{EA} = \frac{M_{last} \cdot g \cdot L}{EA}$

Total sänkning av hisskorgen: $\delta = \frac{8 M_{last} g l D^2}{\pi G d^4} + \frac{M_{last} g L}{EA} \approx 33 \text{ mm}$

Maximal skjuvspänning i axeln $\tau_{max} = \frac{M_{v,total}}{W_v}$

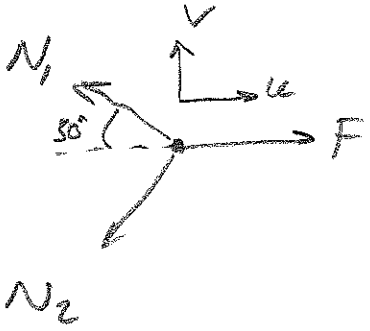
$M_{v,total} = (M_{last} + m_{korg} + m_{vajer}) \cdot g \cdot \frac{D}{2}$

$W_v = \frac{\pi d^3}{16}$

$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{8 D g (M_{last} + m_{korg} + A L \rho_{stål})}{\pi d^3} \approx 52.7 \text{ MPa}$$

5) a) På grund av infästningen kommer stången mellan stöden inte ta upp någon kraft.

Frilägg C



$(\uparrow)\quad N_1 \sin 30° - N_2 \sin 30° = 0$

$(\rightarrow)\quad F - N_1 \cos 30° - N_2 \cos 30° = 0$

$\Rightarrow \quad N_1 = N_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} F \quad , \quad N_3 = 0$

Förskjutning av C

$\delta_1 = u \cos 30° - v \sin 30°$

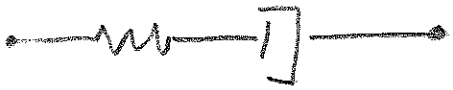
$\delta_2 = u \cos 30° + v \sin 30°$

Materialsamband $\quad \delta = \frac{FL}{EA}$

Pga symmetri är $v = 0$, $u = \frac{\delta_1}{\cos 30°} = \frac{N_1 L}{EA \cos 30°} = \frac{2FL}{3EA}$

b) Då deformationen ökar med tiden måste stängerna vara tillverkade av ett viskoelastiskt material.

Stängerna beter sig initiellt elastisk och har efter en tid under belastning en kvarstående deformation. Detta beteende kan tex beskrivas som ett Maxwell material:



Vid plötslig pålastning är dämparen styv, dvs helt elastiskt beteende. Under belastning töjs dämparen och då strukturen av lastas kvarstår denna deformation.