

Formelsamling i hållfasthetslära

Spänningar och töjningar

Spänningstensorns komponenter $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$ definieras av följande samband

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \\ S_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z, \\ S_z &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z, \end{aligned} \quad (1)$$

där (S_x, S_y, S_z) är kraft per ytenhet som verkar på en godtycklig plan yta med normalvektorn (n_x, n_y, n_z) .

Töjningstensorns komponenter $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \frac{1}{2}\gamma_{xz}, \frac{1}{2}\gamma_{xy})$ definieras av

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2)$$

där u, v och w är förskjutningar i respektive x -, y - och z -led.

Töjningen med töjningskomponenterna $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \frac{1}{2}\gamma_{xz}, \frac{1}{2}\gamma_{xy})$ och spänningen med spänningkomponenterna $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$ är tensorer. På matrisform skrivs tensorerna för spänningar och töjningar

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \text{ resp. } \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix}.$$

Matrisernas egenvärden är huvudspänningar resp. huvudtöjningar. Motsvarande egenvektorer är huvudspänningsriktningar resp. huvudtöjningsriktningar. Spänningstensorn och töjningstensorn har identiska riktningar.

Låt $\{s_x, s_y, s_z, t_{xy}, t_{xz}, t_{yz}\}$ vara en tensor. Tensors egenvärden $s = s_1, s_2$ och $s = s_3$ är rötter till ekvationen

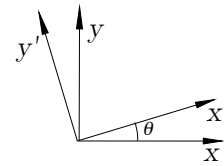
$$\begin{vmatrix} s_x - s & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{xy} & s_y - s & t_{yz} \\ t_{xz} & t_{yz} & s_z - s \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Egenvektorerna (ν_x, ν_y, ν_z) ges av sambanden

$$\begin{aligned} (s_x - s)\nu_x + t_{xy}\nu_y + t_{xz}\nu_z &= 0, \\ t_{xy}\nu_x + (s_y - s)\nu_y + t_{yz}\nu_z &= 0, \\ t_{xz}\nu_x + t_{yz}\nu_y + (s_z - s)\nu_z &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

för $s = s_1, s_2$ respektive s_3 .

Tensortransformation i x - y planet



För tensor (s_x, s_y, t_{xy}) transformeras i koordinatsystemet x' - y' enligt följande

$$\begin{aligned} s'_x &= s_x \cos^2 \theta + s_y \sin^2 \theta + 2t_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ s'_y &= s_x \sin^2 \theta + s_y \cos^2 \theta - 2t_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ t'_{xy} &= \frac{s_y - s_x}{2} \sin 2\theta + t_{xy} \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (5)$$

Vinkeln mellan x -axeln och x' -axeln är θ . Extremvärden för normalkomponenterna s , tillika tensors egenvärden är

$$s_1 = \frac{s_x + s_y}{2} + R, \quad s_2 = \frac{s_x + s_y}{2} - R \quad (6)$$

och maximal skjuvkomponent ges av

$$t_{max} = R$$

där $R = \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + t_{xy}^2}$

Vinkeln α mellan x -axeln och normalvektorn för huvudplanen, ges av

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2t_{xy}}{s_x - s_y} \right). \quad (7)$$

Maximala skjuvkomponenter erhålls i riktningarna

$$\beta = \alpha \pm \frac{\pi}{4} \quad (8)$$

Två effektivspänningar används för att bedöma risken för plasticering. Effektivspänning enligt von Mises hypotes (deviationsarbeshypotesen) definieras av

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \\ &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{xz}^2 + 3\tau_{yz}^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Effektivspänning enligt Trescas hypotes (skjuvspänninghypotesen) definieras av

$$\sigma_e = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|). \quad (10)$$

Konstitutiva samband

Sambandet mellan spänningar och töjningar hos isotropa linjära elastiska material ges av Hookes generaliserad lag:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy},\end{aligned}\quad (11)$$

eller

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)], \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)], \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)], \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}.\end{aligned}\quad (12)$$

Specialt vid plan spänning gäller $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ och

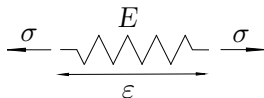
$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y], \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)} [\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x], \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy},\end{aligned}\quad (13)$$

och vid plan deformation gäller $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ och

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right], \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right], \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}.\end{aligned}\quad (14)$$

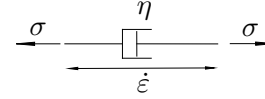
Materialparametrarna E är elasticitetsmodulen och ν är tvärkontraktionstalet eller Poissons tal. Skjuvmodulen definieras som $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

För visko-elastiska material vid enaxlig belastning ges ett samband mellan töjning ε och spänning σ och deras tidsderivator $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\sigma}$, $\ddot{\varepsilon}$, $\ddot{\sigma}$, etc. Enkla element som kan inkluderas i en viskoelastisk modell är linjär elasticitet



$$\sigma = E\varepsilon \quad (15)$$

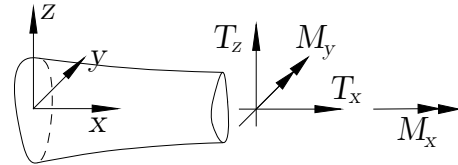
där E är en elastisk modul och linjär viskositet



$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad (16)$$

där η är en viskositetsparameter. Modellerna används i kombination för att simulera mer komplicerade konstitutiva samband.

Enaxlig dragning



Belastning

$$T_x = N, \quad T_z = 0, \quad M_x = M_y = 0 \quad (17)$$

Spänningar

$$\sigma_x = \frac{N}{A}, \quad (18)$$

Differentialekvation

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + X = 0 \quad (19)$$

där X är pålagd utbredd kroppskraft i x -led per längdenhet. Förlängning av en homogen stång med längden L och för $X = 0$ är

$$\delta = \frac{FL}{EA}. \quad (20)$$

Vridning

Belastning

$$T_x = T_z = 0, \quad M_x = M_v, \quad M_y = 0, \quad (21)$$

där M_v är ett vridande moment.

Spänningar i cylindriska rör

$$\tau_{r\theta} = \frac{M_v}{K} r, \quad \tau_{max} = \frac{|M_v|}{W_v} \quad (22)$$

där K vridstyvhetens tvärsnittsfaktor och W_v är vridmotståndet.

För ett cylindriskt rör med ytterdiametern D och innerdiametern d gäller att $K = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$ och $W_v = \frac{\pi}{16D}(D^4 - d^4)$.

Ett kvadratisk tvärsnitt med sidlängden a är ger $K = 0.141a^4$ och $W_v = 0.208a^3$.

För enkelt sammanhängande tunnväggiga tvärsnitt med varierande vägg tjocklek, $t(s)$, där s är en koordinat längs väggen, är $K = \frac{1}{3} \int t^3(s) ds$. Sammansatta trimlor med konstanta tjocklekar t_i och längderna s_i beräknas som en summa $K = \frac{1}{3} \sum t_i^3 s_i$. Summeringen utförs för alla strimlor. Vridmotståndet är i båda fallen $W_v = K/t_{max}$. Här är t_{max} är den största vägg tjockleken.

En tunnväggig hålsektion har $K = 4A^2 / [\oint (1/t(s)) ds]$. Symbolen $\oint$ betyder att integrationen företas längs koordinaten s , varvet runt. Hålets yta är A . Om väggen består av strimlor med konstanta tjocklekar t_i och respektive längder s_i blir $K = 4A^2 / [\sum (s_i/t_i)]$. Vridmotståndet är i båda fallen $W_v = 2At_{min}$, där t_{min} är den minsta vägg tjockleken.

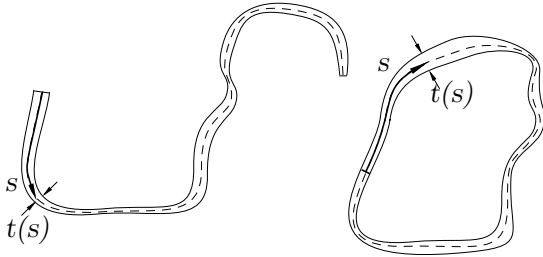


Fig. a) Enkelt sammanhängande sektion. b) hålsektion.

Differentialekvation

$$\frac{dM}{dx} + \mathcal{H} = 0 \quad \text{med} \quad M = GK \frac{d\varphi}{dx}, \quad (23)$$

där $\mathcal{H}$ är pålagt utbredd moment per längdenhet. Förvridning av en homogen stång med längden L och med $\mathcal{H} = 0$ är

$$\varphi = \frac{M_v L}{GK}. \quad (24)$$

Böjning

Belastning

$$T_x = 0, \quad T_z = T, \quad M_x = 0, \quad M_y = M_b, \quad (25)$$

där T är tvärkraft och M_b är böjande moment. Den enda förekommande normalspänningen ges av

$$\sigma_x = \frac{M_b}{I_y} z, \quad \text{med} \quad \sigma_{max} = \frac{|M_b|}{W_y}. \quad (26)$$

z -koordinaten utgår från medellinjen, dvs den linje som bildas av tyngdpunkten i varje tvärsnitt.

Om tvärkraften $T \neq 0$ förekommer även skjuvspänningar. I ett rektangulärt tvärsnitt är dessa

$$\tau_{xz} = \frac{6T}{bh^3} (z - \frac{h}{2})^2. \quad (27)$$

Jämviktsamband vid böjning

$$q = -\frac{dT}{dx} \quad \text{och} \quad T = \frac{dM_b}{dx}. \quad (28)$$

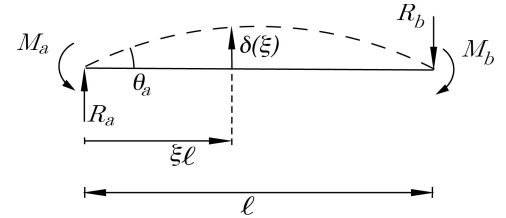
där q är utbredd last i z -led per längdenhet längs balken.

Differentialekvationen för böjning (elastiska linjens ekvation) skrivs

$$M_b = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (29)$$

Lösta exempel för speciella randvillkor

Belastningsfall 1

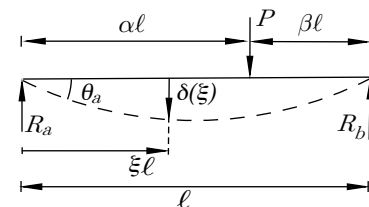


$$R_a = R_b = (M_a - M_b)/\ell,$$

$$\theta_a = \frac{\ell}{6EI} (2M_a + M_b),$$

$$\delta(\xi) = \frac{\ell^2}{6EI} \xi(\xi - 1) [M_a(\xi - 2) - M_b(\xi + 1)].$$

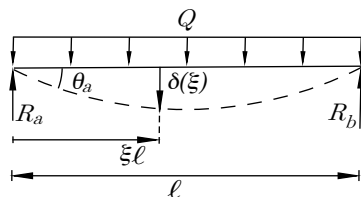
Belastningsfall 2



$$R_a = \alpha P\ell, \quad R_b = (1 - \alpha)P\ell,$$

$$\theta_a = \frac{P\ell^2}{6EI} \alpha \beta (1 + \beta), \quad \delta(\xi) = \frac{P\ell^3}{6EI} \beta [(1 - \beta^2)\xi - \xi^3] \quad \text{för } \xi \leq \alpha.$$

Belastningsfall 3



$$R_a = R_b = \frac{Q}{2},$$

$$\theta_a = \frac{Q\ell^2}{24EI}, \quad \delta(\xi) = \frac{Q\ell^3}{24EI} [\xi - 2\xi^3 + \xi^4].$$

Tvärsnittsdata

Beteckning	$A[\text{mm}^2]$	$I_x[\text{mm}^4]$	$W_x[\text{mm}^3]$	$I_y[\text{mm}^4]$	$W_y[\text{m}^3]$
HE140A	31.4	1030	155	389	56
I80	7.58	77.8	19.5	6.29	3.00
USP200	32.2	1910	191	148	27,0
T-profil 50	5.66	12.1	3.36	6.06	2.42

Rektangulärt tvärsnitt med höjden h och bredden b : $I_y = \frac{bh^3}{12}$, $W_b = \frac{bh^2}{6}$ runt en axel som är parallell med kanterna med längden b och som går genom tvärsnittets tyngdpunkt.

Cirkulärt tvärsnitt med diametern D och med koncentriskt hål med diametern d : $I_y = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$, $W_b = \frac{\pi}{32} \frac{(D^4 - d^4)}{D}$ runt en axel som går genom tvärsnittets tyngdpunkt.

Materialtabeller

Ref. Bodelind och Persson.

Material	$E[\text{kN/mm}^2]$	$\nu [-]$	$\rho[\text{kg/m}^3]$
stål	210 ¹	0.3	7800
höglegerat	206	0.3	7880
rostfritt	220	0.3	7710
aluminium	70	0.34	2700
duraluminium	72	0.32	2800
koppar	120	0.35	8900
volfram	360	0.17	19300
magnesium	45	0.33	1730

Stålkvalitéer	$E[\text{kN/mm}^2]$	$\nu [-]$	$^2\sigma_s[\text{N/mm}^2]$
SS1550-01	205	0.3	260
SS2090-04	206	0.3	1300
SS2172-00	205	0.3	310
SS2331-43	206	0.3	980

¹Elasticitetsmodulen för stål varierar mellan 180 och 240 kN/mm².

²Variationer beroende på materialets volym förekommer.